

Frederik DILLING, Siegen

Wissensentwicklungsprozesse mit Darstellungen von empirischen Objekten – das CMC-Modell

Einleitung

Der Mathematikunterricht der Schule ist stark von Anschaulichkeit und Realitätsbezug geprägt. Anstelle eines axiomatischen und systematischen Aufbaus der Mathematik werden entscheidende Aussagen der Schulmathematik auf der Grundlage der Beobachtung von empirischen Phänomenen entwickelt. So zeigt beispielsweise ein Blick in Schulbücher zur Analysis, dass Begriffe und Aussagen über die Begriffe meist mit Hilfe von Funktionsgraphen begründet werden, der algebraische Kalkül wird lediglich zur exakten Berechnung verwendet (vgl. Witzke, 2014).

Dass die Entwicklung von mathematischen Begriffen und Beziehungen zwischen diesen Begriffen im Unterricht mehr sein sollte als ihre Definition oder formale Herleitung, ist allgemein bekannt. Zur Initiierung von Wissensentwicklungsprozessen werden den Schülerinnen und Schülern daher im Unterricht häufig Darstellungen von empirischen Objekten (z. B. Funktionsgraphen), im Folgenden als empirische Darstellung bezeichnet, zur Verfügung gestellt, mit denen sich eine bestimmte mathematische Aussage entwickeln oder begründen lassen soll. Die empirischen Darstellungen beinhalten neben den empirischen Objekten selbst häufig erläuternde symbolische Ausdrücke. Die Objekte müssen nicht direkt abgebildet sein, sondern können auch lediglich in Textform beschrieben und damit der Vorstellungskraft überlassen werden (z. B. in einem Gedankenexperiment) oder durch den Lernenden selbst gebildet werden (z. B. Konstruktionsbeschreibung). In diesem Beitrag soll ein Modell zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit solchen Darstellungen dargestellt werden.

Schulmathematik als empirische Wissenschaft

Das Konzept der empirischen Theorien im Mathematikunterricht nach Burscheid & Struve (2010) kann zur Beschreibung der Wissensentwicklung von Schülerinnen und Schülern in einem anschauungsgeleiteten Mathematikunterricht herangezogen werden. Demnach ist das mathematische Wissen von Kindern empirisch-gegenständlicher Art und bezieht sich auf spezifische Bereiche ihrer Erfahrung. Die Speicherung der Erfahrungen erfolgt mit Bauersfeld (1983) in so genannten Subjektiven Erfahrungsbereichen, welche neben der kognitiven Dimension auch Faktoren wie Motorik, Emotionen, Wertungen oder die Ich-Identität umfassen. Auf Grund der kontextuellen Bindung

der Erfahrungen entsteht eine ontologische Bindung des mathematischen Wissens mit Bezug auf gewisse empirische Referenzobjekte.

Nach dem Theory-Theory-Ansatz (vgl. Gopnik & Meltzoff, 1997) gehen Kinder bei der Entwicklung von Wissen über Phänomene der Realität in ähnlicher Weise vor wie Wissenschaftler der experimentellen Naturwissenschaften – sie entwickeln dabei eine empirische Auffassung von Mathematik. Das neu erworbene Wissen der Lernenden lässt sich adäquat in (empirischen) Theorien über die im Unterricht kennengelernten Phänomene beschreiben. Eine empirische Theorie ist wesentlich durch die Verwendung sogenannter empirischer und theoretischer Begriffe gekennzeichnet. Theoretische Begriffe sind vereinfacht gesprochen solche, die ihre Bedeutung erst innerhalb einer Theorie erlangen. Für diese Begriffe existieren keine empirischen Referenzobjekte, noch sind sie bereits in einer anderen (Vor-)Theorie geklärt. Nicht-theoretische Begriffe sind dagegen (vereinfacht) solche, die eindeutige Referenzobjekte besitzen (empirische Begriffe) oder in einer bereits existierenden Theorie definiert werden können (vgl. Sneed, 1971).

Wissensentwicklung mit Darstellungen von empirischen Objekten

Der Modellbegriff der allgemeinen Modelltheorie kann zur Beschreibung der Einbindung einer konkreten empirischen Darstellung in eine mathematische Theorie herangezogen werden. Er wird nach Stachowiak (1973) im Wesentlichen durch drei Merkmale charakterisiert.

- **Abbildungsmerkmal:** Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.
- **Verkürzungsmerkmal:** Modelle erfassen im Allgemeinen nicht alle Attribute des durch sie repräsentierten Originals, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und/oder Modellbenutzern relevant scheinen.
- **Pragmatisches Merkmal:** Modelle sind ihren Originalen nicht per se eindeutig zugeordnet. Sie erfüllen ihre Ersetzungsfunktion a) für bestimmte – erkennende und/oder handelnde, modellbenutzende Subjekte, b) innerhalb bestimmter Zeitintervalle und c) unter Einschränkung auf bestimmte gedankliche oder tatsächliche Operationen. (Stachowiak, 1973, S. 131–133)

Empirische Darstellungen mathematischer Sachverhalte lassen sich als Modelle des Sachverhalts interpretieren. Die Zuordnung der Eigenschaften erfolgt bewusst oder unbewusst durch die mit der Darstellung arbeitende und diese damit interpretierende Person. Der Begriff der Eigenschaft beschreibt

in diesem Fall sowohl die empirischen Objekte und ihre Beziehungen in der empirischen Darstellung als auch die empirischen und theoretischen Begriffe und ihre Beziehungen in der (empirischen) mathematischen Theorie. Welche Eigenschaften in der Darstellung wahrgenommen bzw. dieser zugewiesen werden und mit welchen Eigenschaften der mathematischen Theorie diese in Beziehung gesetzt werden, hängt vom interpretierenden Subjekt ab. Die Auffassung von (bzw. das Beliefsystem über) Mathematik bestimmt dabei wesentlich, wie die empirische Darstellung genutzt wird. Bei einer empirischen Auffassung von Mathematik, bilden die in der empirischen Darstellung abgebildeten Objekte die Referenzobjekte der mathematischen Theorie – entsprechend kann die empirische Darstellung zur Wissensentwicklung und zur Begründung der Zusammenhänge genutzt werden.

Die bisherigen Ausführungen lassen sich zu einem Modell zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Darstellungen im Mathematikunterricht zusammenführen. Dieses soll im Weiteren als CMC-Modell bezeichnet werden und bezieht sich auf die englischsprachigen Begriffe *Concept*, *Model* und *Conception*.

Entsprechend des CMC-Modells werden empirische Darstellungen für den Mathematikunterricht gezielt ausgewählt oder entwickelt, um einen bestimmten mathematischen Begriff oder den Zusammenhang zwischen Begriffen zur Ableitung aus den Darstellungen anzubieten. Die Auswahl einer empirischen Darstellung wird durch Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler der Mathematikdidaktik, Schulbuchautorinnen und -autoren sowie Lehrerinnen und Lehrer vollzogen und geschieht auf der Basis des intersubjektiv geteilten mathematischen Wissens der Community (*Concept*). Der empirischen Darstellung kommt dabei aus Sicht der Lehrenden die Aufgabe der Veranschaulichung der mathematischen Begriffe und Beziehungen zu (*Model*).

Eine Schülerin oder ein Schüler geht im Mathematikunterricht mit der empirischen Darstellung um, indem er diese interpretiert, also die dargestellten Objekte und Beziehungen den Begriffen und Beziehungen seiner eigenen empirischen mathematischen Theorie zuordnet. Die Aktivierung eines subjektiven Erfahrungsbereiches bestimmt jeweils, welcher Begriff mit welchem Objekt verbunden wird. Im Umgang mit der empirischen Darstellung (*Model*) entwickelt der Lernende dann seine empirische mathematische Theorie weiter (*Conception*), indem die Beziehungen in der Darstellung teilweise oder vollständig auf die Begriffe der empirischen Theorie übertragen werden.

Die durch den Lernenden entwickelten Begriffe und Beziehungen können somit von der ursprünglich durch den Entwickler bzw. Auswählenden der

Darstellung intendierten Nutzung abweichen. Das CMC-Modell ist in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

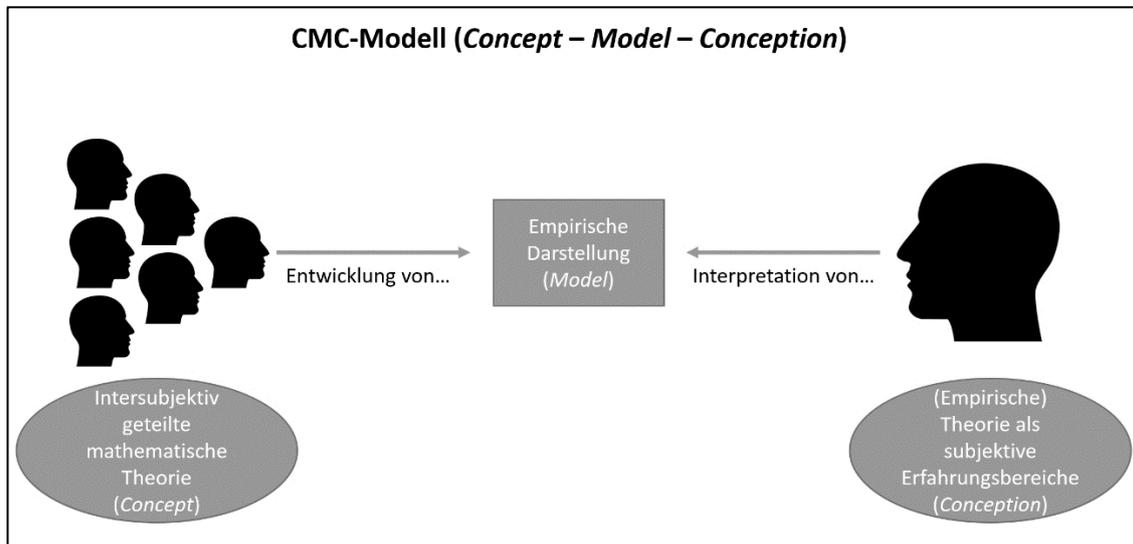


Abb. 1: Schematische Darstellung des CMC-Modells

Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde das CMC-Modell zur Beschreibung von Wissensentwicklungsprozessen mit empirischen Darstellungen vorgestellt und auf der Basis theoretischer Erörterungen begründet. Die Verwendung des Modells kann insbesondere bei interpretativen Analysen in Fallstudien zu anschauungsgeleitetem Mathematikunterricht von Nutzen sein und lässt einen neuen Blick auf aktuelle mathematikdidaktische Forschungsgebiete wie zum Beispiel den Einsatz digitaler Medien zu.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik: Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1–56). Köln: Aulis.
- Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktion: Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Gopnik, A. & Meltzoff, A. N. (1997). *Words, Thoughts and Theories*. Cambridge: MIT-Press.
- Sneed, J. D. (1971). *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht: Reidel.
- Stachowiak, H. (1973). *Allgemeine Modelltheorie*. Wien: Springer.
- Witzke, I. (2014). Zur Problematik der empirisch gegenständlichen Analysis des Mathematikunterrichtes. *Der Mathematikunterricht*, 60(2), 19–32.