

Alfred DOMINIK, Salzburg & Karl Josef FUCHS, Salzburg

## **Die Diskussion von Ortslinien in einem fächerübergreifenden Kontext**

### **Kreis und Ellipse im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 1**

Mit dem Geometrischen Zeichnen besitzt Österreichs Schule ein Pflichtfach, das dem Konstruieren als zentrales Element (einschließlich der Verwendung von Technologie) Bedeutung schenkt. Im Lehrstoff für die Neue Mittelschule finden wir im Abschnitt Ebene Geometrie des Curriculums für die 7. Schulstufe/3. Klasse folgende Formulierung: „Kennenlernen und Anwenden von geometrischen Grundelementen und Grundstrukturen“. (Lehrplan der Neuen Mittelschule, 2019, S. 71). In diesem Zusammenhang wird die Ortsliniendefinition zur Charakterisierung eines Kreises in der Ebene im Unterricht besprochen.

In der 8. Schulstufe/4. Klasse ist die Ellipse als geometrisches Element Lehrstoff. Als ergänzende Beschreibungen für die Behandlung des Themas finden wir im Lehrstoff des Curriculums „Anschauliche Erzeugung; Eigenschaften; Anwendungen“ (Lehrplan der Neuen Mittelschule, 2019, S. 72). Mit anschaulicher Erzeugung bzw. auch mit Anwendungen sind dabei die Ortsliniendefinitionen bzw. die ‚Gärtnerkonstruktion‘ einer Ellipse angesprochen.

### **Methode zur Behandlung in der Mathematik**

Als Methoden zur Behandlung des Themas im Unterricht bieten sich das Prinzip Operativer Begriffsbildung, d.h. die Bildung geometrischer Begriffe erfolgt operativ und geht von bestimmten Zwecken (hier: Umzäunen) aus (Bender & Schreiber, 1985, Definition, S. 26) sowie das Konzept einer Lebendigen Geometrie, die den Umweltbezug als bedeutenden Prozess einer reflektierten Erweiterung der individuellen Erfahrungswelt sieht (Graumann, G. et al, 1996, Aufgabe: Wir spielen einen mathematischen Satz, S. 208), an.

Am Anfang unserer Einheit steht die Beschreibung unserer Elemente Kreis bzw. Ellipse als Ortslinien mit Hilfe des Spurmodus der 2D Grafik von GeoGebra.

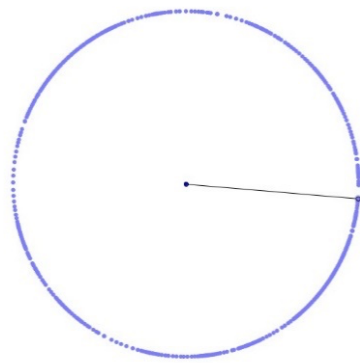


Abb. 1: Kreis als Ortslinie (GeoGebra)

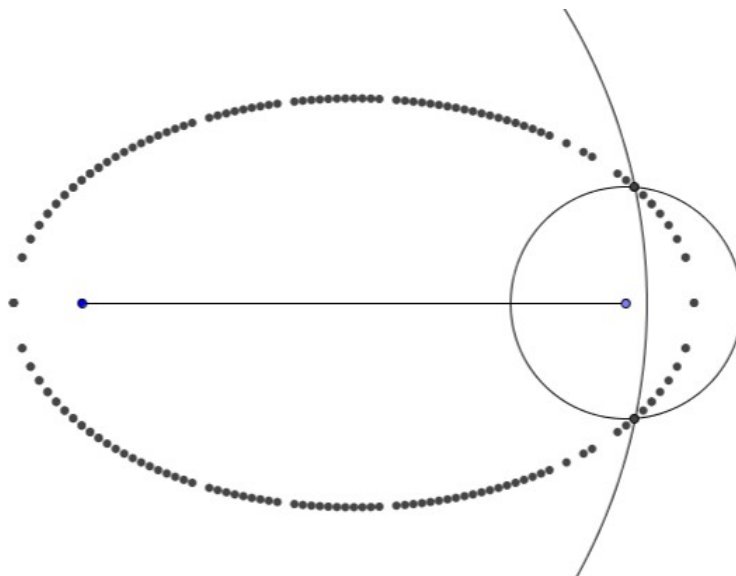


Abb. 2: Ellipse als Ortslinie (GeoGebra)

### Ortslinien in einem fächerübergreifenden Kontext

Nach der mathematischen Beschreibung der kontextrelevanten geometrischen Objekte mit Hilfe der Ortsliniendefinitionen wenden wir uns den Bezügen zur Rechtsprechung zu.

Folgende Episode schildern wir als Ausgangspunkt. In einer Übung im Rahmen des Jusstudiums wurde folgende Frage gestellt: Gilt ein an einem Holzpflöck angeleinter beißwütiger Hund, der zum Zwecke der Sicherung/Abgrenzung eines nicht durch einen festen Zaun begrenzten Grundstücks eingesetzt wird, bereits als Zaun?

In §858 des Allgemeinen Bürgerlichen Gesetzbuchs (ABGB) wird die „...nöthige Einschließung seines Raumes und für die Abtheilung von dem fremden Raume ...“ als Verpflichtung für jeden Grundstückseigentümer formuliert. In einem Kommentar zu diesem Paragraphen wird auf Österreichs

digitalem Amt (2019) im Abschnitt Zäune die Art der Abgrenzung/Einschließung wie folgt beschrieben: „...Die Art der Abgrenzung/Einschließung ergibt sich aus dem Ortsgebrauch...“.

Wir betrachten das von der Ortslinie Kreis abgegrenzte Gebiet.

Durch zwei Trägergeraden wird die Zerlegung der Ebene in ein inneres und ein äußeres Winkelfeld bewirkt (Kirsche, 2006). Die „umzäunte“ und somit „innere“ Fläche ergibt sich als Schnittmenge der Fläche eines Kreises mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $M$  mit dem durch die Endpunkte  $A$  und  $B$  des Kreisbogens eindeutig bestimmten Winkelfeld mit Scheitelpunkt  $M$ . Der Rand der Schnittfläche ist der Zaun  $b$  für unseren an einem Pflock angebundenen Hund, der von  $A$  nach  $B$  läuft.

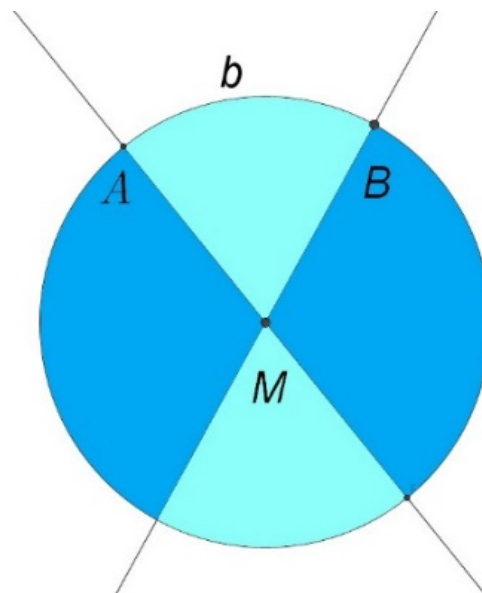


Abb. 3: Winkelfelder im Kreis (GeoGebra)

Das in der Physik behandelte zweite Gesetz von Kepler nehmen wir als Beispiel für eine fächerübergreifende Betrachtung der Ortslinie Ellipse. Die Konstanz des Bahndrehimpulses wird dabei über die Gleichheit der Inhalte zweier Sektoren  $A_1F_2B_1$  und  $A_2F_2B_2$  argumentativ unterstützt, die Änderung der Bahngeschwindigkeit durch die unterschiedlichen Bogenlängen  $b_1$  und  $b_2$  veranschaulicht. Dabei entsteht eine Schnittfläche als Schnitt der Fläche einer Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  mit dem durch die Endpunkte  $A_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  und  $B_1$  zum Zeitpunkt  $t_2$  gebildeten Ellipsenbogen  $b_1$  als eindeutig bestimmtes Winkelfeld mit dem Scheitelpunkt  $F_2$ . Die zweite Schnittfläche entsteht als Schnitt der Fläche der Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  mit dem durch die Endpunkte  $B_2$  zum Zeitpunkt  $t_3$  und  $A_2$  zum Zeitpunkt  $t_4$  gebildeten Ellipsenbogen  $b_2$  als ebenfalls ein-

deutig bestimmtes Winkelfeld mit dem Scheitelpunkt  $F_2$ . Für die Argumentation ist schließlich wichtig, dass die Inhalte der beiden Schnittflächen für jeweils gleichlange Zeitintervalle  $\Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3$  betrachtet werden.

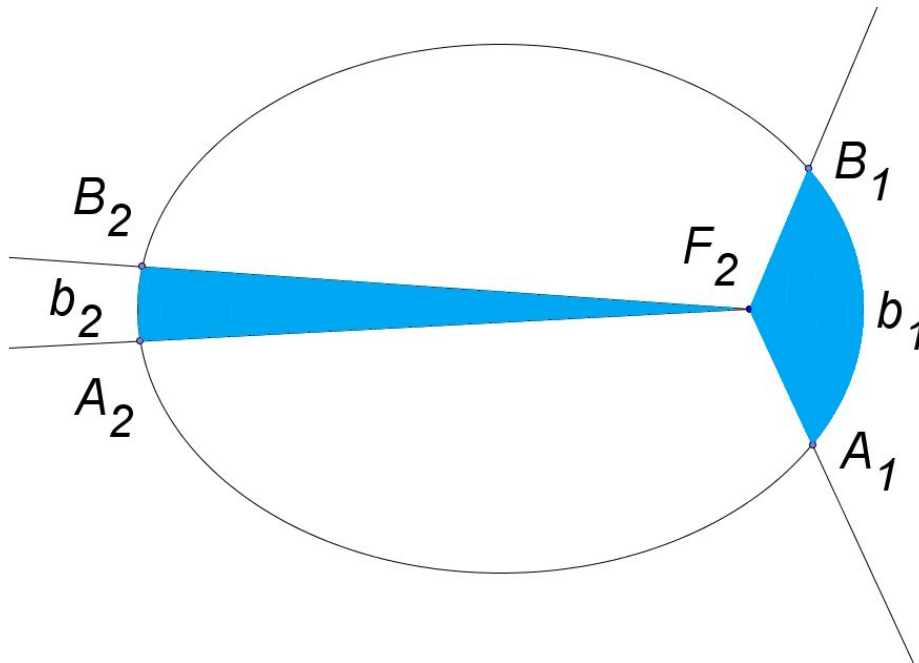


Abb. 4: Zweites Gesetz von Kepler (Ellipse/Winkelfelder – GeoGebra)

## Resümee

Mit unserem Beitrag wollen wir darauf hinzuweisen, wie mathematische Kenntnisse von Ortslinien bei der Bewertung von Situationen in der Rechtsprechung bzw. der Veranschaulichung von Gesetzmäßigkeiten in der Physik hilfreich sein können und zudem interessante Themen für einen fächerübergreifenden Unterricht bereitstellen.

## Literatur

- Bender, P. & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Wien Verlag: HPT.
- Graumann, G., Hölzl, R., Krainer, K., Neubrand, M. & Struve, H. (1996). Tendenzen in der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. *Journal für Mathematik Didaktik* 17, 163–237. <https://doi.org/10.1007/BF03338831>
- Kirsche, P. (2006). *Einführung in die Abbildungsgeometrie*. Wiesbaden: Teubner.
- Lehrplan der Neuen Mittelschule (2019). <https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/Bundesnormen/NOR40207228/NOR40207228.pdf> (26.12.2019).
- Österreichs digitales Amt (2019). [https://www.oesterreich.gv.at/themen/bauen\\_wohnen\\_und\\_umwelt/stoerungen\\_durch\\_nachbarn/Seite.3190050.html](https://www.oesterreich.gv.at/themen/bauen_wohnen_und_umwelt/stoerungen_durch_nachbarn/Seite.3190050.html) (26.12.2019).