Andreas EBERL, Regensburg

Wie man universitäres Wissen in die Schule retten kann: Überlegungen und Beispiele zur zweiten Diskontinuität

Einleitung

Immer wieder ist von angehenden Mathematiklehrkräften zu hören, dass das universitäre Fachwissen für den Lehrerberuf wenig hilfreich sei. Es gibt in der Tat nachvollziehbare Gründe, diese Meinung zu teilen. Schließlich scheinen (bei oberflächlicher Betrachtung) Schul- und Hochschulmathematik wenig Gemeinsamkeiten zu haben. Die erlebte Diskrepanz zwischen Hochschul- und Schulmathematik wurde bereits von Felix Klein beschrieben und als „doppelte Diskontinuität" in der Lehrerausbildung bezeichnet (Klein, 1933). Ziel der folgenden Ausführungen ist es, die zweite Diskontinuität genauer unter die Lupe zu nehmen. Insbesondere wird beleuchtet, inwiefern Wissen aus der universitären Mathematik bei der Planung, Durchführung und Reflexion von Mathematikunterricht doch hilfreich sein kann.

Der Beitrag liefert nach allgemeinen Überlegungen zu den Zusammenhängen zwischen Schul- und Hochschulmathematik drei konkrete Beispiele, wie Mathematiklehrkräfte das an der Universität gewonnene Fachwissen bei der Ausübung ihres Berufes nutzen können. Für eine Vielzahl weiterer Beispiele wird auf das entsprechende Kapitel in Krauss und Lindl (2020) verwiesen.

Schul- und Hochschulmathematik

Sollte ein Studium des Lehramts für das Fach Mathematik von der Schulmathematik ausgehend lediglich zu vertieften Betrachtungen der Inhalte führen (laut Felix Klein „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus")?

Würde man diese Frage mit „Ja" beantworten, würde man vermutlich den Erwartungen mancher Studierender an ein Mathematik-Lehramtsstudium gerecht werden. Allerdings müsste man sich vor der Beantwortung dieser Frage darüber im Klaren sein, was eigentlich „Schulmathematik" ist. Versteht man unter Schulmathematik all das, was an fachlichen Inhalten in der Schule thematisiert wird, und unter Hochschulmathematik all das, was an Fachlichem über den Mathematikunterricht hinausgeht, könnte man hypothetisch davon ausgehen, dass die Schul- und die Hochschulmathematik disjunkte Konstrukte sind. Aber kann man das, was man üblicherweise unter Hochschulmathematik versteht (Analysis I, Lineare Algebra I, ...), überhaupt von der oben beschriebenen Schulmathematik inhaltlich scharf trennen? Vermutlich nicht. Sämtliche aus der Schule bekannten Notationen, Definitionen, Kernaussagen sowie Arbeits- und Begründungstechniken tauchen

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

auch – vielleicht nur als Spezialfälle – in den Vorlesungen an der Universität auf. Also ist die Schulmathematik eine (natürlich echte) Teilmenge von all dem, was in Fachvorlesungen an der Universität gelehrt wird.

Um nun zu illustrieren, dass ein Mathematikstudium fachlich auf das Unterrichten von Mathematik vorbereiten kann, formulieren wir drei prinzipielle Ansatzpunkte zur unterrichtlichen Nutzung universitärer Mathematik:

- **Gängige schulmathematische Festlegungen**, die auf ihre Kompatibilität mit hochschulmathematischen Definitionen hin untersucht werden
- **Hochschulmathematische Beweise**, die zu schülergerechten Begründungen elementarisiert und aufbereitet werden können
- **Hochschulmathematische Aussagen**, die mit Schulmethoden nicht bewiesen werden können, die aber zum Beispiel helfen können, Schülerfragen kompetent zu beantworten

Im Folgenden führen wir zu jedem Aspekt je ein Beispiel detaillierter aus.

1. Wie definiert man Stetigkeit mithilfe eines Bleistifts?

„Man sieht doch sofort, dass $\frac{1}{x}$ nicht stetig ist. Der Graph macht doch einen Sprung.“ (Gedanken eines Schülers im Unterricht)

Eine gängige schulmathematische Festlegung des Begriffs Stetigkeit greift auf die „Bleistiftdefinition“ zurück, die in vielen Schulbüchern zu finden ist:

„Eine Funktion heißt stetig, wenn man ihren Graphen mit einem Bleistift in einem Stück durchzeichnen kann, also den Stift nicht absetzen muss.“

Mit dem „durchgehenden Graphen“ wird zum Beispiel in Feuerlein und Distel (2010, S. 16) argumentiert. Wenngleich diese anschauliche Begriffsbildung durch abstrakte Präzisierungen in manchen Büchern ergänzt wird (Götz et al., 2009, S. 58f.), so bleibt doch die bildliche Vorstellung zur Stetigkeit bei den meisten Schülern haften. Demnach wäre die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{x}$ nicht stetig!? Um dieser Fehlvorstellung vorzubeugen, lohnt es sich, die Bleistiftdefinition der Stetigkeit auf ihre Kompatibilität mit der Definition aus der Analysis-I-Vorlesung hin zu untersuchen:

„Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt an der Stelle $p \in D$ stetig, wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - p| < \delta$.“ (Forster, 2016, S. 119)

Entscheidend für die weitere Analyse ist nicht die Verwendung der Quantoren, sondern dass Stetigkeit punktweise definiert ist und man nur Stellen innerhalb der Definitionsmenge der Funktion betrachtet. Eine Funktion heißt dann stetig, wenn sie an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge stetig ist. Nun wird klar, dass es keinen Sinn macht, bei einer Stetigkeitsuntersuchung der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ die Stelle $x_0 = 0$ ins Kalkül zu ziehen. Bekanntlich ist die Funktion f – entgegen der Bleistiftdefinition – stetig. Man könnte nun die Bleistiftdefinition der Stetigkeit für die meisten schulrelevanten Funktionen retten, indem sie nur auf Intervalle innerhalb der Definitionsmenge angewandt wird. Selbst dann stößt die anschauliche Vorstellung bei „exotischen Funktionen" jedoch an ihre Grenzen (Götz et al., 2009, S. 146f.).

2. Warum ist „Minus mal Minus gleich Plus"?

„Mit Multiplikationstabellen kann man plausibel machen, dass es sinnvoll ist, $(-1) \cdot (-1)$ *gleich* $+1$ *zu setzen. Kann man das weniger suggestiv vermitteln? Wie kann man das fachgerecht begründen?" (Gedanken einer Lehrkraft bei der Unterrichtsvorbereitung)*

Hinter der Aussage „Minus mal Minus gleich Plus" steckt keine willkürliche Definition oder Spezialität der reellen Zahlen. Dass $(-1) \cdot (-1) = +1$ ist, hat einen handfesten Grund, der sich im hochschulmathematischen Beweis der Identität $(-e) \cdot (-e) = e$ zeigt, die in allen „Ringen mit Eins e" gilt. Ein typischer universitärer Beweis (zum Beispiel in Fischer, 2014, S. 57) kann geeignet elementarisiert werden, um eine schülergerechte Erklärung der Aussage $(-1) \cdot (-1) = +1$ für die fünfte Jahrgangsstufe zu liefern:

„*Einerseits ist* $\big(1 + (-1)\big) \cdot (-1) = -1 + (-1) \cdot (-1)$, *andererseits gilt* $\big(1 + (-1)\big) \cdot (-1) = 0 \cdot (-1) = 0$, *also folgt* $-1 + (-1) \cdot (-1) = 0$.

Damit muss $(-1) \cdot (-1)$ *die Gegenzahl zu* -1, *also* $+1$ *sein."*

Bei diesem Vorgehen wird ein Permanenzprinzip sichtbar, das bei Zahlbereichserweiterungen – hier von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$ – generell eine wichtige Rolle spielt: Möglichst viele der gewohnten Rechenregeln sollen weiterhin gelten, zum Beispiel das Distributivgesetz, das gemäß obiger Erklärung einen zentralen Grund für die Regel „Minus mal Minus gleich Plus" liefert.

3. Für welche Polynomfunktionen gibt es eine Formel zur Bestimmung ihrer Nullstellen?

„Gibt es nicht auch bei Polynomen mit höherem Grad als 2 eine Lösungsformel zur Berechnung der Nullstellen? Bei den quadratischen Polynomen kann man die quadratische Ergänzung ja auch durch die Formel umgehen." (Gedanken eines Schülers, der am Sinn der Polynomdivision zweifelt)

Ab der späten Mittelstufe spielen Polynomfunktionen und die Bestimmung ihrer Nullstellen im gymnasialen Unterricht eine Rolle. Zunächst lernen die

Schüler die Lösungsformel für quadratische Gleichungen kennen. Bei der Nullstellensuche für Polynomfunktionen höheren Grades werden die Gleichungen dann meist mit Polynomdivisionen zu quadratischen Gleichungen vereinfacht. Hier stellt sich die Frage, ob es nicht auch für Gleichungen höheren Grades allgemeine Lösungsformeln gibt. Und tatsächlich, für Polynome dritten und vierten Grades existieren solche, auch wenn diese deutlich komplexer aufgebaut sind. Jedoch gibt es keine (noch so komplizierte) allgemeine Formel zur Nullstellenbestimmung von Polynomen vom Grad fünf oder höher (Bosch, 2013, S. 266). Um diese Aussagen einzusehen, benötigt man ein vertieftes Verständnis der Galoistheorie, welches nur durch die Hochschulmathematik erworben werden kann.

Ausblick

Zu jedem der drei genannten Aspekte zur schulischen Nutzung universitärer Mathematik können nun viele weitere Beispiele gefunden werden (Krauss & Lindl, 2020). Dabei erweist es sich als zweckmäßig, in zwei Richtungen zu denken, die als „bottom-up“ und „top-down“ auch im Konstrukt des schulbezogenen Fachwissens (SRCK) von Dreher et al. (2018) genannt werden:

- Bei der Einordnung fachlicher Fragen oder Gedanken eines Schülers kann es hilfreich sein, nach Zusammenhängen zwischen Schule und Hochschule ausgehend vom schulischen Kontext zu suchen.
- Bei der Einordnung fachlicher Fragen, die sich eine Lehrkraft zum Beispiel während der Unterrichtsvorbereitung stellt, spielt insbesondere die Fähigkeit eine Rolle, ausgehend vom hochschulmathematischem Hintergrundwissen das schulmathematische Vorgehen zu hinterfragen.

Literatur

Bosch, S. (2013). *Algebra*. Berlin: Springer Spektrum.

Dreher, A., Lindmeier, A., Heinze, A. & Niemand, C. (2018). What kind of content knowledge do secondary mathematics teachers need? *JMD*, 39(2), 319–341.

Feuerlein, R. & Distel, B. (2010). *Mathematik 12. Unterrichtswerk für das G8*. München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Fischer, G. (2014). *Lineare Algebra*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Forster, O. (2016). *Analysis 1*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Götz, H., Herbst, M., Kestler, C., Kosch, H., Novotny, J., Sy, B., Thiessen, T. & Zitterbart, A. (2009). *Lambacher Schweizer 11. Mathematik für Gymnasien. Bayern*. Stuttgart: Klett.

Klein, F. (1933). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Bd. I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. 4. Auflage. Berlin: Springer.

Krauss, S. & Lindl, A. (Hrsg.) (2020, in Vorb.). *Professionswissen von Mathematiklehrkräften – Implikationen aus der Forschung für die Praxis*. Berlin: Springer.