Andreas EICHLER, Kassel, Julia GRADWOHL, Kassel,
Thomas HAHN, Kassel & Viktor ISAEV, Kassel

Prozeduren beim Lösen von Aufgaben in der Differentialrechnung der Sekundarstufe II

Analysis ist weltweit ein wesentlicher Bestandteil der mathematischen Ausbildung am Ende der Schulzeit wie auch zu Beginn eines MINT-Studiums (Bressoud et al., 2016). Entsprechend gibt es umfangreiche Forschung zum Lehren und Lernen von Analysis (Jones, 2017). Ein wesentlicher Fokus dieser Forschung bezieht sich auf die Differentialrechnung und speziell den Ableitungsbegriff (z.B. Sofronas et al., 2011). Hierbei werden mit wenigen Ausnahmen Lernende an Hochschulen betrachtet. Weiterhin beziehen sich die meisten dieser Studien auf kleine Fallzahlen unter 10 Lernenden (z.B. Haciomeroglu et al., 2010), deren Lernprozesse intensiv erforscht werden. Schließlich trennen sich die Studien bezogen auf die Repräsentation der Aufgaben zum Ableitungsbegriff bezogen auf geometrische Aufgabenstellungen (z.B. Haciomeroglu et al., 2010) oder algebraische Aufgabenstellungen (Siyepu, 2013). Dabei wird insbesondere bei geometrischen Aufgabenstellungen die Erhebung konzeptuellen Wissens (Rittle-Johnson & Schneider, 2014) postuliert (z.B. Berry & Nyman, 2003).

In diesem Feld setzt unser Projekt KoLA (Konzepte von Lernenden zu Grundbegriffen der Analysis) an. Dieses fokussiert auf Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II und damit auf den Beginn des Lernens von Analysis. Zudem hat KoLA zum Ziel, die vielen wichtigen Studien mit kleinen Fallzahlen durch eine Untersuchung mit deutlich größerer Stichprobe mit rund 550 Schülerinnen und Schülern zu ergänzen. Schließlich wird in KoLA angestrebt, die Trennung algebraischer und geometrischer Aufgabenstellungen, die zum Teil auch als Trennung in einen Fokus auf prozedurales und konzeptuelles Wissen verstanden wird (Haapasalo & Kadijevich, 2000), aufzuheben. In diesem Beitrag beziehen wir uns speziell auf prozedurale Aufgaben zum Ableitungsbegriff und untersuchen die Frage, welche Prozeduren Schülerinnen und Schüler in welchem Umfang bei diesen Aufgaben einsetzen.

Theoretische Konstrukte

Prozedurales und konzeptuelles Wissen sind in der mathematikbezogenen Lehr-Lern-Forschung häufig verwendete Konstrukte (z.B. Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Prozedurales Wissen wird als „ability to execute action sequences to solve problems” verstanden, während konzeptuelles Wissen „implicit or explicit understanding of the principles that govern a domain and

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

of the interrelations between units of knowledge in a domain” bezeichnet (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001, S. 346).

In der ACT-Theorie von Anderson (1995) (Adaptive Control of Thought) sind prozedurales und konzeptuelles Wissen (letzteres wird hier als deklaratives Wissen bezeichnet) in dem Sinne aufeinander bezogen, dass das prozedurale Wissen aus Prozeduren (sogenannten productions) besteht, die Ergebnis eines verdichtenden Übersetzungsprozesses aus dem konzeptuellen Wissensbestand darstellen. Prozeduren werden dabei durch Abgleich mit den Bedingungen einer Problemsituation aufgerufen bzw. angewendet und können in einer Verschachtelung zum Aufruf von Unterprozeduren bzw. Subroutinen führen (ebd.). Auf der Basis der ACT-Theorie ist der Aufruf von Wissen personen- und kontextabhängig. Während bei Problem- oder Aufgabenstellungen, die für einen Lernenden neuartig sind, der Übersetzungsprozess von konzeptuellem Wissen zu prozeduralem Wissen stattfinden muss, ist dies bei bekannten Aufgabenstellungen nicht der Fall. In Entsprechung dieser modellhaften Vorstellung beschreiben auch Rittle-Johnson und Schneider (2014, S. 1123) prozedurale Aufgaben als „familiar – they involve problem types people have solved before and thus should know procedures for solving“. Auf der Basis dieser Überlegungen verstehen wir in dieser Arbeit alle Aufgaben, die prinzipiell Lernenden hinsichtlich anzuwendender Prozeduren bekannt sein können, als prozedurale Aufgaben.

Methode

Die Stichprobe im Projekt KoLA umfasst rund 550 Schülerinnen und Schüler eines deutschen Bundeslandes. In der Stichprobe wurden verschiedene Sets von prozeduralen Aufgaben zum Ableitungsbegriff mit geometrischem wie algebraischem Fokus eingesetzt. Aufgabenbeispiele, die jeweils von mindestens 100 Lernenden bearbeitet wurden, werden bei der exemplarischen Diskussion von Ergebnissen gezeigt. Die Bearbeitung (30 Minuten) fand ohne inhaltliche Intervention statt. Alle Aufgabenbearbeitungen wurden anhand eines Manuals mindestens zur Hälfte doppelt kodiert, wobei nur die Kodes beachtet wurden, die eine Reliabilität über 0,75 (Cohens Kappa) aufwiesen. Kodiert wurden dabei Prozeduren von Schülerinnen und Schülern, die in den Aufgabenbearbeitungen sichtbar sind. Als systematisch angewendete Prozeduren wurden schließlich solche behandelt, die eine Häufigkeit von größer 5% in zumindest einer Teilaufgabe aufwiesen.

Exemplarische Ergebnisse

Wir beziehen die exemplarische Analyse von Schülerprozeduren auf die in der Abb. dargestellten Aufgaben, die in dem Sinne prozedural sind, dass von der Bekanntheit bei Lernenden (beide Aufgaben sind lehrplankonform) und somit vom prinzipiellen Vorliegen entsprechender Prozeduren ausgegangen werden kann. Die beiden Aufgaben verdeutlichen zudem den Unterschied algebraischer Aufgaben und geometrischer Aufgaben.

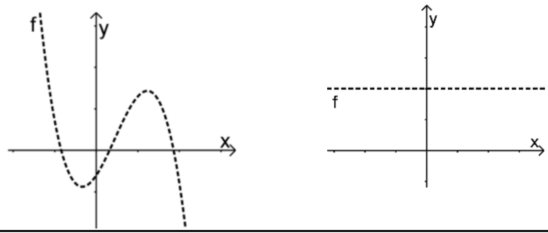
Bestimmen Sie jeweils die Ableitung für die Funktion f.	Zeichnen Sie die Ableitungsfunktion f'(x) der gegebenen Funktion f jeweils in das gleiche Koordinatensystem.
a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$ b) $f(x) = x^3 \cdot e^x$ c) $f(x) = (2x + 4)^7$	

Abb.: Prozedurale Aufgaben algebraisch (links) und geometrisch (rechts)

Die Prozeduren der Schülerinnen und Schüler führen zu einem erheblichen Anteil zu Abweichungen von einer normativen Lösung. Abweichungen können im Sinne der ACT-Theorie übergreifend auf drei Weisen erklärt werden (Anderson, 1995).

(1) Die im Lernprozess wichtige Generalisierung von Prozeduren auf eine möglichst maximale Anzahl möglicher Bedingungen für den Aufruf einer Prozedur wird überschritten. Im Fall der algebraischen Aufgabe b) wenden beispielsweise 29% der Schülerinnen und Schüler eine Über-Generalisierung an, indem das Produkt analog zu einer Summe von Funktionen zu $f'(x) = 3x^2 \cdot e^x$ abgeleitet wird. Nur bezogen auf fehlerhafte Lösungen kann sogar bei rund 80% der Fälle diese Über-Generalisierung festgestellt werden. Bei der geometrischen Aufgabe interpretieren wir Lösungen, bei denen wie bei einer Parameteränderung Spiegelungen oder Verschiebungen des Graphs der Funktion erzeugt werden, als Übergeneralisierung der Parametermanipulation in der Sekundarstufe I, bei der Graphen verschoben oder gestreckt, aber in der Form belassen werden. Solche Übergeneralisierungen sind bei 6% aller Lösungen zu beobachten.

(2) Eine Pseudo-Diskrimination umfasst eine nicht adäquate Einschränkung der zulässigen Bedingungen für eine Prozedur. Wenn im Allgemeinen erfolgreiche Prozeduren lokal nicht abgerufen werden, also beispielsweise der Term x in einer ganzrationalen Funktion im Gegensatz zu Termen mit Potenzen größer 1 nicht abgeleitet wird, kann eine Pseudo-Diskrimination vorliegen (siehe Aufgabe a in Abb. 1). Eine Pseudo-Diskrimination kann in 6% der Lösungen der ersten algebraischen Aufgabe und in 22% der Lösungen für den rechten Graphen in der geometrischen Aufgabe interpretiert werden. Die absolute Prozentzahl ist hier im algebraischen Fall zwar gering, macht aber wiederum 80% der nicht korrekten Lösungen aus.

(3) Eine dritte Begründung für eine Abweichung von einer normativen Lösung besteht im Aufruf unpassender Subroutinen. Im Fall der dritten algebraischen Aufgabe sind das Regelverletzungen wie das Fehlen einer inneren Ableitung oder die fehlerhafte Verknüpfung von äußerer und innerer Ableitung (27% aller Fälle). Analog gibt es auch Lösungen zur geometrischen Aufgabe, die auf eine unangemessen verkürzte Prozedur hinweisen, wenn etwa nur die Form und/oder nur charakteristische Punkte betrachtet werden, aber nicht die Steigung bezogen auf Intervalle.

Im Vortrag werden die quantitativen Ergebnisse für die von Schülerinnen und Schülern verwendeten Prozeduren umfassend dargestellt und die aus der Verortung mit Hilfe der ACT-Theorie resultierenden Konsequenzen für eine Förderung diskutiert.

Literatur

Anderson, J. R. (1995). *The Architecture of Cognition:* Routledge.

Berry, J. S. & Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior,* 22(4), 479–495.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus. ICME-13 Topical Surveys.* Cham: Springer International Publishing.

Eichler, A., Gradwohl, J., Hahn, T. & Isaev, V. (2018). Fehlkonzepte beim Lösen prozeduraler Analysisaufgaben. *Beiträge zum Mathematikunterricht.*

Haciomeroglu, E. S., Aspinwall, L. & Presmeg, N. C. (2010). Contrasting Cases of Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs. *Mathematical Thinking and Learning,* 12(2), 152–176.

Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 21(2), 139–157.

Jones, S. R. (2017). An exploratory study on student understandings of derivatives in real-world, non-kinematics contexts. *The Journal of Mathematical Behavior,* 45, 95–110.

Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2014). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. Cohen Kadosh, A. Dowker, B. Rittle-Johnson, & M. Schneider (Hrsg.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition.* Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S. & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology,* 93(2), 346–362.

Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *The Journal of Mathematical Behavior,* 32(3), 577–592.

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L. & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior,* 30(2), 131–148.