Kirstin ERATH, Dortmund

Identifikation von Verstehensgrundlagen für einen dynamischen Ähnlichkeitsbegriff

Die Ähnlichkeitsgeometrie bildet den Einstieg in die berechnende Geometrie am Ende der Sekundarstufe 1. Während aus fachlicher Perspektive ein auf Euklid zurückgreifender und ein abbildungsgeometrischer Zugang zur Ähnlichkeit unterschieden wird (Hölzl, 2018), kann in Schulbüchern oft eine Mischform beobachtet werden. Der Einstieg in die Ähnlichkeit erfolgt meistens über das maßstäbliche Vergrößern und somit über der Erarbeitung des Ähnlichkeitsbegriffs aus eher dynamischer Perspektive (Erath, 2019). Im Folgenden wird der Forschungsfrage nachgegangen, welche Verstehensgrundlagen Lernende benötigen, um einen dynamischen Begriff der Ähnlichkeit im Rahmen einer an Brousseaus (1997) Tangram angelehnten Erarbeitungsumgebung entwickeln zu können.

Verstehensgrundlagen

Als Verstehensgrundlagen werden inhaltliche Vorstellungen und Darstellungen aus vorherigen Schuljahren bezeichnet, die für das Verstehen eines neuen Lerngegenstands benötigt werden (Leuders & Prediger, 2016), gerade schwache Lernende aber oft nicht beherrschen. Für Lernende am Ende der Sekundarstufe 1 umfasst dies also beispielsweise Grundvorstellungen zu Operationen aus der Grundschule genauso wie Grundvorstellungen zu Brüchen vom Beginn der Sekundarstufe. Ergänzt wird diese Definition hier um die Ebene der (handwerklichen) Verfahren wie beispielsweise das Messen und Abtragen von Winkeln.

Die Bedeutung des Konstrukts der Verstehensgrundlagen wurde für das Design inklusiven Unterrichts bereits herausgearbeitet (Strucksberg & Prediger, 2018) und in vier Zwecken zusammengefasst: (1) Lücken in den Verstehensgrundlagen identifizieren und Lerngelegenheiten zur Überwindung anbieten; (2) Differenzierte Lernziele festlegen; Verknüpfungen von mehreren Lernstufungen herstellen und dadurch (3) auch die aktive Teilhabe der Förderkinder ermöglichen und (4) dadurch dem Spiralprinzip gerecht werden. Dies kann auf die Entwicklung von Lehr-Lern-Arrangements ohne den speziellen Fokus Inklusion übertragen werden, insbesondere die Punkte (1) und (4).

Im Kontext der hier vorgestellten Entwicklungsforschungsstudie wird das Konstrukt dabei zweifach genutzt. Zum einen analytisch, um Lernendenhandlungen und -denkweisen zu verstehen und Hürden im Lernprozess zu

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

identifizieren. Zum anderen konstruktiv, im Sinn einer expliziten Bearbeitung der Hürden im Design bzw. zugehörigen didaktischen Kommentaren.

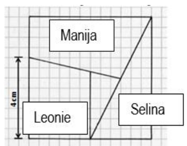
Forschungsdesign

Die vorliegenden Daten stammen aus dem zweiten Zyklus der lernprozessfokussierenden Entwicklungsforschungsstudie (Gravemeijer & Cobb, 2006) MAGENTA und wurden in 6 außerunterrichtlichen Kleingruppen von 2 bis 3 Lernenden am Ende der 8. oder 9. Klasse in einer Realschule im Ruhrgebiet erhoben. Die hier vorgestellten Verstehensgrundlagen wurden sowohl aus epistemologischer Analyse des Lerngegenstands als auch aus empirischer Analyse der Lernendeninteraktionen und -schriftprodukte gewonnen. Die zugrundeliegende Definition von Ähnlichkeit aus eher dynamischer Perspektive lautet: *Zwei Figuren heißen ähnlich zueinander, wenn die eine Figur (Bild) eine maßstäbliche Vergrößerung oder Verkleinerung der anderen Figur (Original) ist. Die Figuren sind auch dann noch ähnlich, wenn das Bild im Vergleich zum Original gedreht, gespiegelt oder verschoben ist.*

Empirische Ergebnisse: Vielfältige benötigte Verstehensgrundlagen

Die Verstehensgrundlagen *Strecken bzw. Winkel messen und abtragen* sind elementar für das Zeichnen vergrößerter/verkleinerter Figuren und somit für die handlungsorientierten Einstiege in das Thema Ähnlichkeit. Während Strecken zumeist kein Problem darstellen, bereitet der Umgang mit Winkeln vielen Lernenden Schwierigkeiten, beispielsweise auch Leonie, die dadurch in ihrem Zeichenprozess nicht weiterkommt:

82	Leonie:	Hilfe, wie soll ich einen schiefen Strich machen? […]
83	Selina:	Bist du irgendwie dumm? *(deutet auf das Geodreieck)* Hier sind doch Winkel und alles?
84	Manija:	Jaa!
85	Leonie:	Ja, aber ich kann’s nicht.



Häufig kann ein Fehlen der Verstehensgrundlage *Multiplikation als Skalieren* beobachtet werden. Einige Lernende verharren in der Vorstellung „Multiplikation macht größer“, andere assoziieren mit Vergrößern den Spezialfall des Verdoppelns (bzw. Verkleinern und Halbieren):

31	Hakan:	Wir hatten allgemein im Kopf so, dass wir jetzt halt verdoppeln müssen.
32	Lehrkraft:	Okay, und wie seid ihr darauf gekommen, dass ihr verdoppeln müsst?
33	Angelina:	Weil wir ja am Ende halt eine vergrößerte Figur haben wollen.
34	Lehrkraft:	Okay, aber von 4 auf 7 ist ja nicht verdoppelt, ne?
35	Angelina:	Nee, das wäre ja nur 3 plus.

Wie Angelina in Zeile 35 greifen viele Lernende nicht auf die Verstehensgrundlage des Multiplizierens als Skalieren zurück, sondern zeigen verschiedene additive Vorgehensweisen (Erath, 2019), die auch im weiteren Prozess nur schwer verworfen werden. Zum Beispiel formuliert Lara:

29 Lara: Eh, ich hab mir gedacht, also weil aus vier sieben werden, das sind ja 3 cm Unterschied, hab ich die entsprechend 3 cm größer gemacht. Also die, eh, Seiten gemessen, wie lang die sind und dann hab ich die entsprechend 3 cm verlängert.

Einige Lernende versuchen auch auf die Verstehensgrundlage *Maßstab* zurückzugreifen, die auf der Idee des Multiplizierens als Skalieren aufbaut, unverstanden jedoch beispielsweise zusammen mit einer additiven Vorstellung eher synonym zum Begriff Originallänge verwendet wird:

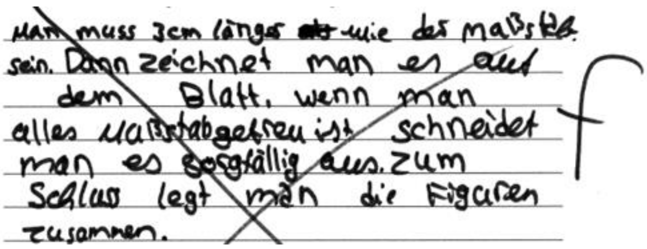


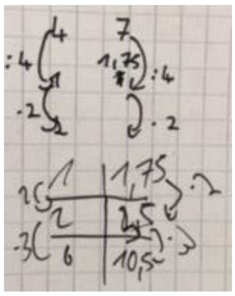
Abb.: Später verworfene Anleitung zum Vergrößern von Jussuf, Hamsa und Younis.

Auch Ideen des *proportionalen Denkens*, im Sinn von „pro ein Zentimeter im Original immer x Zentimeter im Bild“, und damit verbunden die Vorgehensweise des *Dreisatzes* können Verstehensgrundlagen sein, wenn die Lernenden dabei sind, den Vergrößerungsfaktor zu erarbeiten. Das folgende Beispiel zeigt zudem eine scheinbar tragfähige Verknüpfung mit der Verstehensgrundlage Maßstab:

53 Julian: […] das ist ja wie so ein Maßstabsdings, oder? Also wenn 4 cm 7 cm sind und 4 cm; es wird ja nach zwei gefragt; die Hälfte und von der Hälfte von 7 sind 3,5.

…

63 Julian: Ehm, ich hatte ja mit dem Dreisatz für 1 cm ausgerechnet 1,75; mal 6, weil es 6 cm waren, das wären dann 10,5.



Aus der epistemologischen Analyse des Lerngegenstands ergibt sich zudem die Verstehensgrundlage *Kongruenz bzw. Kongruenzabbildungen*. Allerdings bleibt diese in der Datenanalyse implizit, da in der Lernumgebung (wie auch in den meisten Schulbüchern) die Verknüpfung mit den Kongruenzabbildungen implizit bleibt, auch wenn sie aus abbildungsgeometrischer Perspektive Teil der Ähnlichkeitsdefinition ist (siehe oben).

Zusammenfassung und Ausblick

Die herausgearbeiteten Verstehensgrundlagen für einen dynamischen Ähnlichkeitsbegriff können unterschiedlichen Kompetenzbereichen (Werkzeuge, Arithmetik, Funktionen, Geometrie) zugeordnet werden. Bis auf das Messen und Abtragen von Winkeln ist es möglich, nur auf Verstehensgrundlagen aus der Grundschule zurückzugreifen: Strecken messen und abtragen ist ebenso Teil des Grundschulunterrichts wie der Aufbau der Grundvorstellungen zur Multiplikation und erste Vergrößerungen und Verkleinerungen auf Gitterpapier, zum Teil mit Angaben in der Form „1 : x". Diese Grundlagen werden dann in der Sekundarstufe 1 zur Maßstabsidee sowie dem proportionalen Denken und dem Dreisatz weitergeführt.

Im Fall der weiterzuentwickelnden Lernumgebung sind Messen und Abtragen von Strecken und Winkeln sowie Multiplizieren als Skalieren unabdingbare Lernvoraussetzungen und werden daher gegebenenfalls (wieder)erarbeitet. In der weiteren Projektarbeit wird ein Fokus auf der Frage liegen, welche weiteren Verstehensgrundlagen für eine Euklidische Definition von Ähnlichkeit und für die Strahlensätze hinzukommen. Neben der Grundvorstellung *Bruch als Verhältnis* scheint hier auch das proportionale Denken endgültig als Verstehensgrundlage aufzutreten.

Projektkontext. Das Projekt MAGENTA: Mathematik erklären, Geometrie entdecken und teilhaben an Gruppenarbeitsprozessen – Eine Entwicklungsforschungsstudie zur Unterstützung mathematischer Erklärungen sprachlich schwacher Lernender in Klasse 9 wird durch die Deutsche Telekom Stiftung unterstützt (Senior Fellowship Fachdidaktik MINT an K. Erath).

Literatur

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Erath, K. (2019, im Druck). Explorative study on language means for talking about enlarging figures in group work. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University und ERME.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney & N. Nievven (Hrsg.), *Educational design research* (S. 17–51). London: Routledge.

Hölzl, R. (2018). Ähnlichkeit. In H.-G. Weigand et al. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 203–225). Berlin: Springer Spektrum.

Leuders, T. & Prediger, S. (2016). *Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Strucksberg, J. & Prediger, S. (2018). Spezifizierung von Verstehensgrundlagen von Prozenten und ihr Nutzen für den inklusiven Mathematikunterricht. In Fachgruppe Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1763–1766). Münster: WTM.