Lidia FEIL, Marburg

Umgang von Studienanfängern mit quantifizierten Aussagen – eine Pilotstudie

Hintergrund und Fragestellung

Der Übergang von Schule zur Hochschule stellt im Fach Mathematik eine besondere Herausforderung dar (vgl. Gueudet, 2008; Roth et al., 2015). An der Philipps-Universität Marburg wird an Angeboten gearbeitet, die Studierende dabei unterstützen sollen. Zuletzt wurde ein Einstiegstest entwickelt, um den Leistungsstand der Erstsemester in den Bereichen *Elementare Algebra* und *Logik/ mathematische Sprache* zu erfassen, sowie eine auf den Testergebnissen basierende wöchentliche Präsenzveranstaltung zum Üben und Wiederholen der Themen aus diesen Bereichen angeboten. Ein Entwicklungsprojekt im Paradigma des Research-Based Design (vgl. Leinonen, 2010) soll diesen Ansatz zu einem Angebot im Blended Learning Format weiterentwickeln – hierdurch soll erreicht werden, dass die Übungsphasen noch individueller auf die Studierenden abgestimmt und von diesen flexibel genutzt werden können.

Für die Entwicklung dieses Unterstützungsangebots steht derzeit die Diagnose der Eingangsvoraussetzungen im Bereich *Logik/ mathematische Sprache* im Vordergrund. Epp (2003) beschreibt mögliche Probleme von Studierenden im Umgang mit Negation, Implikation und Quantoren, die das mathematisch korrekte Argumentieren erschweren. Buchbinder und Zaslavsky (2013a und 2013b) sehen Förderbedarf hinsichtlich des Beispielverständnisses und entwickelten ein Modell, welches mögliche Rollen verschiedener Beispiele bei quantifizierten Aussagen illustriert. Auf Grundlage des Modells konzipierten sie Aufgaben, welche sie bei Schülerinnen und Schülern einer zehnten Klasse zur Diagnose und als Fördermaßnahme einsetzten.

Vor diesem Hintergrund untersuchen wir in der ersten Phase des Entwicklungsprojekts folgende Forschungsfragen:

> (F1): Wie gehen Mathematik-Erstsemesterstudierende nach der Einführung der Quantoren in der Erstsemester-Vorlesung „Grundlagen der Mathematik“ mit quantifizierten Aussagen um, und auf welche Weise und in welchem Maße nutzen sie dabei Beispiele?
>
> (F2): Lassen sich Unterschiede in der Verwendung von Beispielen bei quantifizierten Aussagen nach einer Intervention erkennen, die die Rolle von Beispielen bei quantifizierten Aussagen im Sinne des genannten Modells von Buchbinder und Zaslavsky explizit thematisiert?

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Pilotstudie: Ausgangssituation, Planung, Durchführung

Zur Bearbeitung der Forschungsfragen wurde für Mathematikerstsemester eine Intervention entwickelt und im Rahmen einer Großübung in der neunten Vorlesungswoche durchgeführt. Die formale Einführung der Quantoren erfolgte in der vorhergehenden Woche in der Vorlesung, in der als Beispiel eine wahre Existenzaussage durch ein Beispiel bewiesen und eine falsche Allaussage durch ein Beispiel widerlegt wurden. Vorher hatten sich die Studierenden bereits informell mit quantifizierten Aussagen beschäftigt.

Zu Beginn der Übung bearbeiteten die 71 Teilnehmer einen Praetest (acht Minuten), darauf folgte eine Übungsphase in Partnerarbeit mit einem Input (etwa eine Stunde), abgeschlossen wurde die Übung mit einem Posttest (acht Minuten). Sowohl im Prae- als auch im Posttest sollten die Studierenden bei fünf Aussagen entscheiden, ob die Aussagen *wahr*/ *vermutlich wahr*/ *weiß ich nicht*/ *vermutlich falsch*/ *falsch* sind, und ihre Entscheidungen begründen. Um Abhängigkeiten vom Wissen aus der Vorlesung *Lineare Algebra* zu vermeiden, waren die Aussagen auf das Themenfeld *Elementare Zahlentheorie* bezogen. Es wurden fünf Aussagenpaare nach in Tabelle 1 gezeigtem Schema entworfen, wobei jedes Aufgabenpaar aus zwei inhaltlich ähnlichen und in Versprachlichung identischen quantifizierten Aussagen bestand. Aus diesen wurden sechs verschiedene Praetests mit zugehörigen Posttests erstellt, die jeweils unterschiedliche Aussagen von jedem Typ enthielten.

Typ	Quantor	wahr / falsch	Erwartete Antwort
1	$\exists$	f	*falsch*; Begründung argumentativ
2	$\forall$	f	*falsch*; Gegenbeispiel
3	$\exists$	w	*wahr*; Beispiel
4	$\exists$	f	*falsch*; z.B. Beweis durch Betrachtung aller möglichen Beispiele
5	$\forall$	w	*vermutlich wahr/weiß ich nicht*; Beweis recht komplex

Tab. 1: Entwurfsschema der Aussagenpaare

Von Buchbinder und Zaslavsky (2013a) stammten die folgende Aussage von Typ 3 „Es existieren zwei ganze Zahlen, deren Summe größer als eine der beiden Zahlen ist und kleiner als die andere.“ sowie eine weitere Aussage von Typ 2. Ein Beweis für Aussagen von Typ 5 war in der verfügbaren Zeit nicht zu erwarten. Dieser Aussagentyp wurde bewusst gewählt, um zu ermitteln, wie Studierende mit solchen Aussagen umgehen.

Die Übungsphase begann mit Aufgaben zur Versprachlichung von formalen Quantoren als kurze Wiederholung. Als Zweites folgte eine weniger klassische Aufgabe, die auf Grundlage von Buchbinder und Zaslavsky (2013a) konzipiert wurde. Zuerst sollten die Studierenden vorgegebene Beispiele zu einer falschen Allaussage untersuchen und entscheiden, ob die Beispiele die

Aussage *stützen*/ *nicht stützen* oder *irrelevant* für die Aussage sind, dann, ob diese Beispiele *ausreichen*/ *nicht ausreichen*/ *nicht anwendbar* sind, um die Allaussage zu beweisen bzw. zu widerlegen. Als Übersicht wurde danach Tabelle 2 ausgefüllt.

Aussage	**Allaussage**					
Ziel	***Beweisen***			***Widerlegen***		
Bsp. Typ	ausr.	nicht ausr.	nicht anwendb.	ausr.	nicht ausr.	nicht anwendb.
stütz. Bsp.						
nicht stütz. Bsp.						
irrel. Bsp.						

Tab. 2: Teilaufgabe aus der Übungsphase

Anschließend wurden analog entworfene Aufgaben zu einer wahren Existenzaussage gestellt. In der Inputphase wurden Lösungsvorschläge zu den ersten zwei Aufgaben präsentiert. In weiteren Aufgaben wurde beispielsweise gefragt, ob der Wahrheitswert mithilfe von Beispielen bestimmt werden kann oder nicht.

Erste Ergebnisse und Diskussion

Wir stellen in diesem Beitrag die Ergebnisse zu den drei Aussagen vom Typ 2, 3 und 5 aus dem Praetest in den Fokus. Tabelle 3 fasst die Ergebnisse zusammen (die erwarteten Antworten sind grau hinterlegt; *n* steht für die Anzahl der begründeten Antworten).

	n	**wahr**	**vermutlich wahr**	**weiß ich nicht**	**vermutlich falsch**	**falsch**
Typ 2	33	7	0	0	0	**26**
Typ 3	35	**29**	1	0	2	3
Typ 5	19	4	**7**	**4**	1	3

Tab. 3: Ergebnisse ausgewählter Aufgaben

Zur falschen Allaussage (Typ 2) haben 26 Personen das Richtige angekreuzt. Von diesen gaben nur sieben ein Gegenbeispiel an; zwölf Studierende haben nicht mit einem Beispiel argumentiert, sondern begründeten ihre Entscheidung mit einer Klasse von Gegenbeispielen. Aus diesen Antworten ist nicht erkennbar, ob diese Studierenden ein einzelnes (Gegen-) Beispiel als ausreichende Begründung ansehen. Die Argumentationen aller anderen beinhalteten Fehler, die auf Missachten der Voraussetzungen oder auf fehlerhaften Umgang mit Implikation und Negation hindeuten. Insbesondere Letzteres stimmt mit Beobachtungen von Epp (2003) überein.

Die wahre Existenzaussage (Typ 3) wurde von 26 der 29 richtig Antwortenden mit einem geeigneten Beispiel bewiesen. Eine Person gab trotz eines korrekt gewählten Beispiels an, dass die Aussage nur *vermutlich wahr* sei.

Die anderen wählten einen allgemeinen, von Beispielen unabhängigen Ansatz und folgerten aus fehlerhaften Behauptungen, dass die Aussage *wahr*, *falsch* bzw. *vermutlich falsch* sei. Ob diese Personen kein geeignetes Beispiel fanden oder erst gar nicht nach einem suchten, ist nicht klar.

Eine erwartete Antwort lieferten bei der wahren Allaussage (Typ 5) elf Personen, meistens ohne Angabe einer Begründung. Vier Personen entschieden sich für *wahr*. Dies deutet darauf hin, dass sie eine definitive Wahr-Falsch-Antwort einem *vermutlich* vorzogen, obwohl sie ihre Entscheidung lediglich mit einem vermutlich existierenden Satz begründeten. Eine Person entschied sich für *wahr* mit der Begründung, dass sie viele Beispiele gefunden habe, für die die Aussage zutrifft.

Fazit und Ausblick

Die ersten Ergebnisse tragen zur Beantwortung von (F1) bei, insofern sie zeigen, dass ein großer Anteil der Studierenden ein solides Verständnis bezüglich der Rolle der Beispiele bei quantifizierten Aussagen hat, während bei einem kleineren, aber nicht zu vernachlässigenden Anteil Probleme beobachtbar sind, die nicht auf neu gelernte, mathematische Inhalte zurückzuführen sind. Als weitergehende Auswertung soll untersucht werden, ob diese Personen im Test insgesamt kein einziges Mal mit Beispielen argumentiert haben. Dies würde darauf hinweisen, dass in diesem Bereich Förderbedarf besteht. In Bezug auf (F2) wird derzeit noch untersucht, ob die Studierenden nach der Übungsphase im Posttest Beispiele gezielter bei ihrer Argumentation nutzen.

Literatur

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2013a). A holistic approach for designing tasks that capture and enhance mathematical understanding of a particular topic: The case of the interplay between examples and proof. In C. Margolinas (Hrsg.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (S. 22-35). Oxford, UK.

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2013b). Inconsistencies in students' understanding of proof and refutation of mathematical statements. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* (S. 129-136). Kiel: PME.

Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly,* 110(10), 886-899.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics,* 67(3), 237-254.

Leinonen, T. (2010). *Designing Learning Tools. Methodological Insights.* Ph.D. Aalto University School of Art and Design. Jyväskylä: Bookwell.

Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (Hrsg.). (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten.* Wiesbaden: Springer Spektrum.