Marei FETZER, Frankfurt

Musterverständnis von Studierenden

Für das mathematische Denken ist es grundlegend, Zahlen in ihrer Struktur zu begreifen, Beziehungen von Zahlen zueinander zu erkunden oder strukturelle Beziehungen (etwa in Form von Rechengesetzen) zu verstehen. Entsprechend werden den Kindern vom ersten Schuljahr an verschiedene Aktivitäten zum Erkennen und Nutzen von Mustern angeboten. Aber nicht immer mündet die Arbeit mit Mustern im Erkennen der zugrundeliegenden *mathematischen* Struktur, wie nachstehendes Beispiel aus dem Forschungsprojekt von Schulte-Wißing (2020) illustriert (vgl. Abb.1).

0.	734	+	222	=	0.	734	+	222	=	0.	734	+	222	=		
1.	724	+	233	=	1.	724	+	233	=	1.	724	+	233	=		
2.	714	+	244	=	2.	714	+	244	=	2.	714	+	244	=		
3.	704	+	255	=	3.	704	+	255	=	3.	704	+	255	=		
4.		+		=	4.		+	266	=	4.		+	266	=		
5.		+		=	5.		+	277	=	5.		+	277	=		
6.		+		=	6.		+	288	=	6.		+	288	=		
7.		+		=	7.		+	299	=	7.		+	299	=		
…					…					…						
10.		+		=	10.		+		=	10.		+	322	=		

Abb.1: Strukturiertes Päckchen, Fabians Fortsetzung (vgl. Schulte-Wißing, 2020, S. 2)

Fabian scheint sich bei der Fortsetzung des Musters an Oberflächenmerkmalen zu orientieren. Indem er einen ‚Ziffernblick‘ einnimmt und das Oberflächenmuster auf der Grundlage der sichtbaren Ziffernanordnung als ‚Schnapszahlen‘ fortsetzt, vernachlässigt er die zugrundeliegenden mathematischen Beziehungen (Erhöhung des zweiten Summanden um elf). So wird die Oberflächenstruktur an Position acht des Päckchens gestört, da hier das Oberflächenmuster nicht mehr mit der Tiefenstruktur korrespondiert.

Aktuelle empirische Forschungsarbeiten zum Musterverständnis bei Kindern bestätigen, dass eine differenziertere Sicht auf Muster und das Deuten arithmetischer und geometrischer Muster eingenommen werden muss (Schulte-Wißing, 2020; Welsing, 2018). Entsprechend spreche ich in Anlehnung an Schulte-Wißing (2020) im Folgenden von Oberflächenmerkmalen und Tiefenstrukturen. Außerdem wird deutlich, dass eine „produktive Irritation“ (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2016, S. 319) durch Brüche zwischen Oberflächenmerkmalen und Tiefenstrukturen, wie sie in Fabians Aufgabe angelegt ist, nicht per se zum Deuten der zugrundeliegenden Tiefenstrukturen führt. Hier kommt der Lehrperson eine wichtige Rolle zu, indem sie die Kinder durch einen inhaltlich-mathematischen Austausch und das gemeinsame Explizit machen der *Beziehungen der Tiefenstrukturen* in diese Deutungsdifferenzen einführt.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Was bedeuten diese Befunde zum Musterverständnis bei Kindern für die universitäre Lehrerausbildung? Diese Überlegungen waren Auslöser für erste Untersuchungen zur Frage: Wie deuten Studierende Muster hinsichtlich divergierender Tiefenstrukturen und Oberflächenmerkmalen und wie nutzen sie diese für Begründungen? Basis dieser Pilotstudie sind Prä- und Post-Bearbeitungen (B1 & B2), die im Rahmen eines vierstündigen Vertiefungsseminars mit 24 Studierenden entstanden sind. Im Zentrum der Lehrveranstaltung stand die intensive Beschäftigung mit substanziellen Aufgabenformaten. Dabei wurden Muster und strukturelle Beziehungen auf symbolisch-numerischer sowie auf algebraischer Ebene von den Studierenden erforscht und Zusammenhänge begründet. Sowohl vor wie auch nach der strukturellen Erkundung und Systematisierung haben die Studierenden die u. g. Aufgabe (Abb. 2) bearbeitet. Dazu habe ich die Studierenden in Anlehnung an Nührenbörger & Schwarzkopf (2016) aufgefordert, Zahlenmauern, in denen lediglich die Grundsteine gegeben waren, hinsichtlich der Gleichheit der Decksteine zu vergleichen.

„Welche Zahlenmauern haben denselben Deckstein wie die linke?

Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne zu rechnen.“

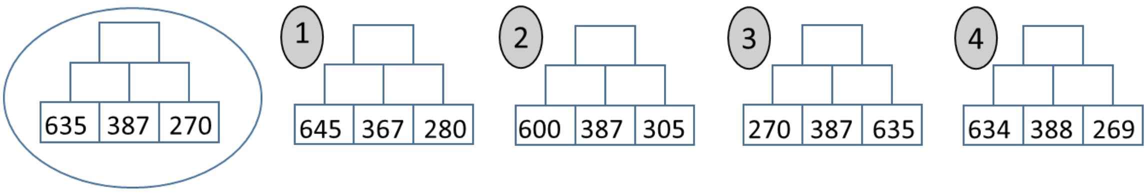

Abb.2: Zahlenmauer und Vergleichsmauern ZM1 – ZM4

Auf der Grundlage der Tiefenstruktur lässt sich der Deckstein einer dreistöckigen Zahlenmauer (ZM) durch den Term a+2b+c beschreiben, wenn die Grundsteine a, b, c gegeben sind. Somit bleibt der Deckstein einer dreistöckigen Zahlenmauer bei Veränderung des Mittelsteins um x gleich, wenn die Ecksteine um Zerlegungen des Doppelten von x gegensinnig zum Mittelstein verändert werden. Für ZM1 & ZM4 bedeutet dies, dass der Rückgriff auf die Tiefenstruktur zur Begründung erforderlich ist: In ZM1 kommt es zu einer produktiven Irritation hinsichtlich der Oberflächenmerkmale. Die Summe der Grundsteine ist in beiden Zahlenmauern gleich, dennoch sind die Decksteine verschieden. Dieses Oberflächenmerkmal korrespondiert nicht mit der Tiefenstruktur. In ZM4 ist der Mittelstein um 1 erhöht und die beiden Ecksteine jeweils um 1 verringert; die Summe der Grundsteine ist somit verschieden, dennoch bleibt der Deckstein gleich. Die Gleichheit der Decksteine lässt sich nur unter Rückgriff auf die zugrundeliegende Tiefenstruktur erfassen. In ZM2 & ZM3 dagegen führen auch Oberflächenmerkmale wie das Symmetrieargument ‚Vertauschen der Ecksteine‘ oder das gegensinnige

Verändern, gedeutet als Gleichheit der Summe der Grundsteine, zu richtigen Begründungen. In diesen Fällen korrespondieren Oberflächenmerkmale und Tiefenstruktur.

Im Folgenden wird dargestellt, wie die Studierenden mit der Irritation zwischen Oberflächenmerkmalen und Tiefenstruktur umgingen. In der ersten Phase B1 bearbeiten jeweils nur drei von 24 Studierenden ZM1 und ZM4 richtig. Alle übrigen führen entweder keine oder mathematisch falsche Begründungen für die Gleichheit / Nicht-Gleichheit der Decksteine an, die auf Oberflächenmerkmale rekurrieren (vgl. Abb.3).

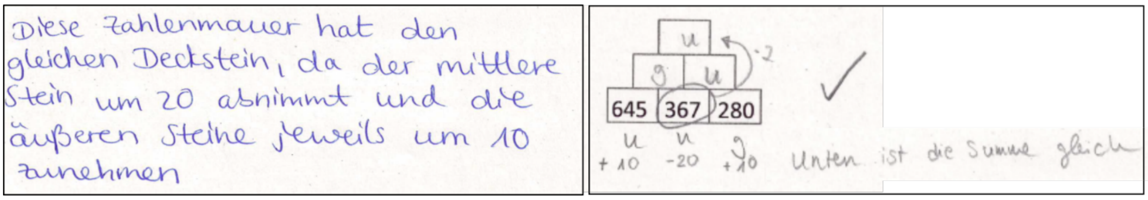

Abb. 3: Begründungen zur Gleichheit der Decksteine bei ZM1.

Obwohl die Studierenden die Zahlenmauern angemessen *algebraisch beschreiben* konnten (Tiefenstruktur), wird auch in der 2. Phase B2 die Divergenz zwischen Oberflächenmerkmalen und Tiefenstruktur nicht von allen Studierenden reflektiert: ZM2 & ZM3 werden nun fast von allen Studierenden richtig gedeutet. Dabei nutzt etwa ein Viertel der Beteiligten zur Begründung Oberflächenmerkmale und verzichtet auf Begründungen zu ZM1 & ZM4, die im Hinblick auf Tiefenstrukturen nicht mit den genutzten Oberflächenmerkmalen korrespondieren. Für ZM1 & ZM4 führen in B2 nur noch weniger als die Hälfte der Studierenden mathematisch falsche Begründungen an, die auf oberflächliche Merkmale rekurrieren. Gut die Hälfte begründet die Entscheidung mathematisch treffend, auch bei Irritation der Oberflächenstruktur (ZM1 & ZM4).

Im Vergleich von erster und zweiter Bearbeitung sind bei allen Studierenden Entwicklungen zu beobachten. Es lassen sich 6 unterschiedliche Progressionstypen (PGT) rekonstruieren. Die ersten drei Progressionstypen verweisen auf ein Verständnis der Tiefenstruktur. Die Studierenden des PGT 1 entwickeln schon in der ersten Phase strukturelle Begründungen, die in der zweiten Phase ausdifferenziert werden. PGT 2 entwickelt sich von zunächst falschen Begründungen zu strukturell adäquaten Begründungen. PGT 3 arbeitet in Phase 1 ohne Begründungen (ausschließlich mit Markierungen) und legt in Phase 2 treffende Begründungen unter Ausnutzung der Tiefenstruktur vor. Hier sind also tiefgreifende Entwicklungen zu rekonstruieren. PGT 4 kennzeichnet anfänglich gleiche und ungleiche Decksteine, ohne die Entscheidungen zu begründen, liefert aber im zweiten Teil angemessene Begründungen über das Symmetrieargument und das gegensinnige Verändern für ZM2

& ZM3. Dieser PGT verbleibt folglich auf der Ebene der Oberflächenstruktur, was sich bei der Bearbeitung von ZM2 & ZM3 als tragfähig erweist. Für PGT 5 lässt sich ausgehend von *einer* richtigen Begründung für ZM2 *oder* ZM3 eine Progression zu *zwei* richtigen Begründungen im Kontext ZM 2 *und* ZM 3 rekonstruieren. PGT 6 zeigt in Phase 1 falsche Markierungen und entwickelt in Phase 2 Begründungen zu ZM2 & ZM3, die sich auf Oberflächenmerkmale beziehen. Diese werden auf ZM1 & ZM4 verallgemeinernd übertragen und führen zu falschen Entscheidungen und Argumentationen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass bei allen Studierenden dieser Seminargruppe Entwicklungen zu verzeichnen sind. Allerdings gelingt es nur etwa 60% dieser Studierenden, mit Referenz zur Tiefenstruktur zu argumentieren. Auch bei den übrigen 40% ist der Blick auf strukturelle Betrachtungen grundgelegt. Dennoch verlassen sie die Ebene der Oberflächenmerkmale nicht, obwohl sie zuvor im Seminar algebraische Analysen des Aufgabenformates vorgenommen haben. Dieser Befund gibt Anlass zur Diskussion: Im Kontext der Musterdeutung scheint die Unterscheidung zwischen Oberflächenmerkmalen und mathematischer Tiefenstruktur keineswegs trivial und nicht nur für Bearbeitungen von Grundschulkindern von Relevanz. Allein die Kenntnis der mathematischen Struktur eines Aufgabenformates genügt nicht, um im operativen Handeln mit strukturierten Aufgabenformaten (hier Zahlenmauern) einen Blick zu entwickeln, der über eine Deutung von Oberflächenmerkmalen hinausweist. Augenscheinliche Veränderungen von Zahlen verleiten auf der Oberfläche des direkt Sichtbaren zu Argumentationen, die nicht mit der mathematischen Tiefenstruktur korrespondieren. Wenn wir einen Umgang mit Mustern im Mathematikunterricht der Grundschule fordern, der ein langfristig tragfähiges Verständnis mathematischer Muster entwickelt, ist es notwendig, Studierende für Divergenzen hinsichtlich der Oberflächenmuster und Tiefenstrukturen zu sensibilisieren und diese über produktive Irritationen mit den Studierenden explizit zu thematisieren.

Literatur

Nührenbörger, M. & Schwarzkopf, R. (2016). Processes of mathematical reasoning of equations in primary mathematics lessons. In *CERME* 9 (S. 316–323), Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic.

Schulte-Wißing, E. (erscheint 2020). Kinder deuten Zahlenmuster. Eine epistemologische Analyse kindlicher Strukturierungsattribute operativer, arithmetisch-symbolischer Lernumgebungen.

Welsing, F. (2018). Grundschulkinder argumentieren mit Anschauungsmitteln. Epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 1951–1954). Münster: WTM-Verlag.