Michael GAIDOSCHIK, Brixen

Ist der Zahlenstrahl eine ordinale Darstellung? Besser nicht!

1. Ziel des Beitrags: Begriffliche Klarheit als Basis für Design-Planung

Freudenthal (1983, S. 101) bezeichnet den Zahlenstrahl als „device beyond praise“; für Kinder erweist er sich hingegen oft als „schwierig zu verstehen“ (Scherer & Moser Opitz, 2010, S. 138). Wie jedes Anschauungsmittel, ist auch der Zahlenstrahl nicht „selbstredend“ (Schipper & Hülshoff, 1984); die didaktisch intendierte Interpretation ist „Lernstoff“. Bei und nach der Erarbeitung muss damit gerechnet werden, dass die Interpretationen der Kinder zumindest anfangs andere sind und vielleicht auch hartnäckig andere bleiben, als dies von der Lehrkraft erwartet wird (Söbbekke, 2005).

Umso wichtiger, dass die Lehrkraft selbst ein klares Ziel vor Augen hat und weiß, wie Kinder den Zahlenstrahl interpretieren sollten, um ihn im weiteren Mathematikunterricht erfolgreich verwenden zu können. Diesbezüglich scheinen mir Erläuterungen zum Zahlenstrahl in einigen aktuellen fachdidaktischen Handbüchern wenig hilfreich. Der vorliegende Beitrag bemüht sich deshalb zunächst um eine begriffliche Klärung. Auf deren Basis wird ein Design für die Erarbeitung des Zahlenstrahls skizziert, das sich von publizierten Vorschlägen teils deutlich unterscheidet.

2. Ordinale, kardinale und Mess-Deutung des Zahlenstrahls

In aktuellen Handbüchern für den Mathematikunterricht wird zum Zahlenstrahl vielfach festgehalten, dass er „den Ordinalzahlaspekt [betont]“ (Käpnick, 2014, S. 165), bei ihm „der ordinale Zahlaspekt im Vordergrund steht“ (Scherer u. Moser Opitz, 2010, S. 85) und ähnliches. Dazu muss zunächst beachtet werden, dass Zahlenstrahle in unterschiedlicher Form im Unterricht Verwendung finden. Für den „vollständig beschrifteten Zahlenstrahl“ (Krauthausen, 2018, S. 322) ist die „Betonung des Ordinalzahlaspekts“ kaum zu bestreiten: Auf einem solchen Zahlenstrahl z.B. von 0 bis 10 steht unter jeder Markierung eine Zahl in Ziffernschreibweise; es mag dann naheliegen, beispielsweise die Zahl sieben als jenen Markierungsstrich zu deuten, unter dem die Ziffer 7 geschrieben ist. Schipper, Ebeling und Dröge (2015) scheinen dies sogar für die einzig richtige Deutung zu halten, wenn sie den Zahlenstrahl als „Modell des ordinalen Aspekts“ besprechen und dies wie folgt erläutern: „Jeder natürlichen Zahl entspricht damit ein ganz bestimmter Punkt des Zahlenstrahls, nicht ein Abschnitt bestimmter Länge (Maßzahlaspekt), erst recht nicht der [sic!] Anzahl der Punkte bzw. Striche auf dem Zahlenstrahl (Kardinalzahlaspekt).“ (Schipper et al., 2015, S. 63)

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Tatsächlich ist aber auch eine andere Deutung widerspruchsfrei zumindest möglich – jene, die vermutlich Scherer und Moser Opitz (2010, S. 138) als „kardinal“ und Götze, Selter und Zanettin (2019, S. 35) als „stete Verknüpfung ordinaler und kardinaler Zahlvorstellungen“ bezeichnen. Begrifflich präziser scheint mir allerdings, hier von einer Interpretation im Sinne des Messens oder einer „Mess-Deutung“ zu sprechen (vgl. Gravemeijer, 2004): Sieben ist dieser Interpretation gemäß am Zahlenstrahl als Strecke zu sehen, zunächst als Strecke zwischen den mit 0 und 7 beschrifteten Markierungen. Es geht bei dieser Deutung also natürlich nicht, wie von Schipper et al. (2015) oben zurecht zurückgewiesen, um die „Anzahl der Punkte bzw. Striche“ auf dem Zahlenstrahl, sehr wohl aber um die Anzahl der Abstände, die zwischen der Markierung 0 und der Markierung 7 liegen.

Der Maßzahlaspekt ist dabei (wie stets!) nicht sinnvoll vom Kardinalzahlaspekt zu trennen (und dieser, wie stets, nicht vom Ordinalzahlaspekt): Die Strecke der Länge sieben umfasst sieben Einerstrecken, wobei die Einerstrecke der Abstand jeweils zwischen zwei benachbarten Markierungen ist. Das ist ganz analog zum Ablesen einer Länge am Maßband zu denken: Liefert mir dieses bei Anlegen der 0 an einem Ende der zu messenden Länge als Messergebnis am anderen Ende „7“, dann steht dieses „sieben Zentimeter“ für den Abstand zwischen den Markierungen 0 und 7 (und nicht für den Markierungsstrich, der mit 7 bezeichnet ist). Strecken derselben Länge sieben sind dann freilich auch beispielsweise zwischen den Markierungen 1 und 8, 2 und 9 usw. zu finden. Strecken dieser Länge sieben lassen sich auch stets in zwei Strecken der Längen sechs und eins, fünf und zwei usw. zerlegen; sie sind stets um eins länger als Strecken der Länge sechs, halb so lang wie Strecken der Länge vierzehn, usw. Zahlbeziehungen werden also, dieser Deutung gemäß, am Zahlenstrahl als Beziehungen gemessener Größen (Längen) dargestellt (Gaidoschik, 2017; Gravemeijer, 2004).

3. Inkonsistenzen der ordinalen Deutung, Vorteile der Mess-Deutung

Wie erwähnt, gibt es Zahlenstrahle in unterschiedlicher Form. In der Regel sind diese nicht vollständig beschriftet. Ein verbreiteter Aufgabentyp konfrontiert Kinder mit Zahlenstrahlen oder vielmehr Zahlenstrecken, an denen Randzahlen markiert und beschriftet sind. Dazwischen sollen Zahlen „möglichst genau positioniert“ werden, oder zu einer nicht beschrifteten Markierung (etwa genau in der Mitte, oder auch an beliebigen anderen Positionen) soll die entsprechende Zahl in Ziffernschreibweise geschrieben werden.

Bei solchen und vergleichbaren Aufgaben am Zahlenstrahl erweist sich die Nützlichkeit der oben erläuterten Mess-Deutung. Deren Anwendung auf zwei- und mehrstellige Zahlen setzt allerdings voraus, dass bereits grundlegende Einsichten ins Bündelungs- und Positionsprinzip vorhanden sind. Dieses Wissen um das Stellenwertsystem in Kombination mit der Mess-Deutung erlaubt, beispielsweise auf einer sonst nicht strukturierten Zahlenstrecke zwischen 0 und 100 zunächst den Abstand zwischen den Markierungen 0 und 100 als genau 100 = 1 Hunderter = 10 Zehner zu ermitteln. Die Hälfte davon sind 5 Zehner = 50; die Hälfte davon ist 25; diese 25 noch über die 50 der Mitte weiter hinaus gemessen, ergibt die Markierung für 75. Entsprechende visuo-motorische Fähigkeiten vorausgesetzt, können auf Basis solcher Überlegungen auf einer zunächst leeren Zahlenstrecke zwischen 0 und 100 also unschwer 50, dann 25 und 75 eingezeichnet oder den Markierungen an diesen Positionen die entsprechenden Zahlen zugeordnet werden. Alternativ oder auch ergänzend ist denkbar, eine Zehntelung der Strecke zu versuchen und auf dieser Basis zu den Zehnerzahlen zu gelangen – ohne weitere Hilfsmittel kein einfaches Unterfangen, aber mit ein wenig Versuch und Irrtum mit befriedigender Genauigkeit hinzubekommen.

Eine planvolle Lösung solcher Aufgaben ist bei rein ordinaler Deutung hingegen m. E. nicht möglich; diese erfasst ja auch nicht, dass Zahlenstrahle aus gutem Grund in der Regel so gezeichnet werden, dass gleiche Abstände gleichen Differenzen entsprechen. Das lässt sich aus dem ordinalen Zahlaspekt nicht ableiten. Diesem wäre auch Genüge getan, wenn die Abstände zwischen zwei natürlichen Zahlen beliebig variieren, solange nur alle Zahlen im gewählten Abschnitt in der richtigen Reihenfolge eingetragen werden. Die Äquidistanz der Markierungen, auf die bei vollständig markierten Zahlenstrahlen (anders als am Rechenstrich) Wert gelegt und die bei Aufgaben zur Positionierung auf nicht vollständig markierten Zahlenstrahlen unterstellt wird, ist erklärbar nur dann, wenn wir Kardinal- und Maßzahlaspekt mitdenken. Kinder, die das nicht tun, sind bei solchen Aufgaben entsprechend hilflos; sie versuchen es zählend (mit der Schwierigkeit, dass das, was sie zählen wollen, erst konstruiert werden müsste), oder verlegen sich auf mehr oder weniger willkürliches Raten. Fromme (2017) beschreibt einige solche Lösungsversuche von Zweit- und Drittklässlerinnen, ähnliches von australischen Zehn- bis Zwölfjährigen ist bei Diezmann et al. (2010) nachzulesen.

4. Die Konsequenz: Mess-Deutungen systematisch erarbeiten!

Verbreitete Vorschläge zur Erarbeitung des Zahlenstrahls gehen vom vollständig beschrifteten Zahlenstrahl und/oder der Hunderterkette aus und zielen darauf ab, dass Zahlenstrahle mit nicht durchgängigen Einermarkierungen von den Kindern als „Abstraktion“ von diesen ersten Formen verstanden werden. Vor dem Hintergrund der obigen Ausführungen erscheint mir konsequenter, den Zahlenstrahl unmittelbar über den Mess-Gedanken zu erarbeiten. Da der Zahlenstrahl seine (beträchtlichen!) Vorzüge als Darstellungsmittel erst bei zwei- und mehrstelligen Zahlen ausspielen kann (Gaidoschik, 2015), sollte dies erst ab dem 2. Schuljahr erfolgen, nach Erarbeitung von Bündelungs- und Positionsprinzip und dann im Kontext des Messens. So wie z.B. mit Meterstäben Längen ausgemessen werden, können Zehnerstangen und Einerwürfel des Stellenwertmaterials messend verwendet werden, um Zahlen als Längen darzustellen. 10 Zehnerstangen nahtlos der Länge nach aneinandergelegt, ergeben die Länge eines Hunderters. An z.B. 4 Zehnerstangen noch 5 Einerwürfel angereiht, stellt 45 als Länge dar. Der Zahlenstrahl als rein graphische Darstellung hält dann nur noch fest, wie lange (von 0 ausgehend) die einer Zahl zugeordnete Strecke ist, sowie z.B. 30 am Meterstab anzeigt, dass die Länge bis dorthin 30 cm ist. Für die rasche Orientierung genügt es, zu markieren/notieren, bis wohin 10, 20, 30… reichen.

Soweit die Skizze, in aller hier gebotenen Kürze. Über Erfahrungen mit der Erprobung dieses Designs ist an anderer Stelle zu berichten.

Literatur

Diezmann, C. M., Lowrie, T. & Sugars, L. (2010). Primary students' success on the structured number line. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 15(4), 24–28.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Gaidoschik, M. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des "Hunderterraums". *Journal für Mathematik-Didaktik,* 36(1), 163–190.

Gaidoschik, M. (2017). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung.* 10. Auflage. Horneburg: Persen.

Götze, D., Selter, C. & Zanettin, E. (2019). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht.* Hannover: Klett-Kallmeyer.

Gravemeijer, K. (2004). Learning trajectories and local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning* 6(2), 105–128

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin – Heidelberg: Springer Spektrum.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984). *Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen?* Grundschule, 16(4), 54–56.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel.* Hildesheim: Franzbecker.