

Daniela GÖTZE, Siegen

Elemente der Arithmetik dynamisieren und digitalisieren

Seit dem Wirksamwerden des Lehrerausbildungsgesetzes im Jahre 2009 (LABG 2009) ist im Lehramt Grundschule in NRW – wie in manch anderen Bundesländern auch – der Lernbereich mathematische Grundbildung verpflichtend zu studieren und dies sogar im gleichen Umfang wie der Lernbereich sprachliche Grundbildung, die Bildungswissenschaften und ein weiteres Unterrichtsfach. Allerdings würde ein erheblicher Teil der Grundschulstudierenden das Fach Mathematik nicht freiwillig wählen, wenn es optional wäre (Winter, 2003). Das mag möglicherweise daran liegen, dass diese Studierenden ein eher rudimentäres konzeptuelles Verständnis von elementaren arithmetischen Zusammenhängen oder Fachbegriffen besitzen (Feldmann, 2012). Auch zeigen sie große Probleme darin, einfache arithmetische Sachverhalte (wie z. B. ‚die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist immer gerade‘) vollständig korrekt zu beweisen (Kempen, 2019). Zudem ist bei vielen Erstsemesterstudierenden des Grundschullehramts eine eher statische Sichtweise mathematischen Lernens beobachtbar (Grigutsch et al., 1998; Winter, 2003). Insofern sollten im Übergang von der Schule zur Hochschule nicht nur primär mathematische Wissenslücken gefüllt, sondern gleichermaßen alte „Überzeugungsstrukturen zur Mathematik“ (Barzel et al., 2016) aufgebrochen werden. „Damit eine fachwissenschaftliche Veranstaltung zum Aufbau eines angemessenen Bildes von „Mathematik als Prozess“ beiträgt, muss sie begleitet sein von umfangreichen Lernsituationen der individuellen mathematischen Aktivität“ (Barzel et al., 2016, S. 38).

Die Herausforderungen und die Problematiken, die sich in jedem Semester für diese spezielle Kohorte der angehenden Grundschullehrkräfte ohne große mathematische Affinität immer wieder von Neuem stellen, sind daher die folgenden:

Wie kann es gelingen, dass Studierende des Grundschullehramts eigene fachliche Lerndefizite und Überzeugungsstrukturen aufarbeiten und durch ein konzeptuelles Verständnis elementarmathematischer Inhalte ersetzen können?

Diese Frage soll im Folgenden vor allem am Beispiel des elementaren Beweisens weiter behandelt werden.

Elementares Beweisen in der Grundschullehrerausbildung

Im Zentrum des seit 1970 geführten didaktischen Diskurses steht „die Frage nach angemessenen Elementarisierungen „des Beweisens“ für verschiedene

Schulstufen, bei denen häufig schulstufenangemessene, „vereinfachende“, zugänglichmachende Darstellungsmittel eine zentrale Rolle spielen“ (Biehler & Kempen, 2016, S. 142). Ein wichtiges Anliegen dieser Elementarisierung ist einerseits mathematisches Beweisen zu vereinfachen, aber andererseits die Beweisidee bzw. den Beweisinhalt nicht zu verfälschen (Biehler & Kempen, 2016; Kirsch, 1977). Vielfach wird in diesem Zusammenhang das generische und inhaltlich-anschauliche Beweisen genannt (Biehler & Kempen, 2016). Kirsch (1979) sieht in diesen Beweisformen nicht nur die Chance, den Studierenden einen Zugang zu formalen Beweisen zu ermöglichen, sondern auch die Chance, Lehrkräfte für die schnelle Diagnostik von Eigenproduktionen von Schülerinnen und Schülern bestmöglich handlungsfähig zu machen. Nachweislich haben aber viele Grundschulstudierende große Probleme, solche elementarisierten Beweise selbstständig durchzuführen, selbst wenn sie in Vorlesungen oder Übungen diese Beweise kennengelernt haben (Feldmann, 2012). Viele Studierende akzeptieren sogar einzelne Zahlenbeispiele als Beweis (Kempen, 2019).

Konzeption von Beweisvideos im Projekt „Arithmetik digital“

Im Projekt „Arithmetik digital“ (gefördert im Rahmen eines Fellowship für Innovationen in der digitalen Hochschullehrer vom MKW NRW und vom Stifterverband) wurden daher Videos zu verschiedenen Themenbereichen der Arithmetik erstellt und auf der Projektwebseite *adi.dzlm.de* verfügbar gemacht. Darunter sind sowohl illustrierende als auch beweisende Videos zu finden (eine detaillierte Übersicht in Götze, 2019). Im Folgenden wird vor allem die Konzeption der Beweisvideos detaillierter vorgestellt.

Die Beweisvideos fokussieren die oben genannten elementarisierten Formen des Beweisens, sie sollen aber – wie bereits erwähnt – die Beweisidee bzw. den Beweisinhalt nicht verfälschen. Zudem greifen sie typische Schwierigkeiten von Studierenden beim Verstehen oder auch beim eigenständigen Erstellen von Beweisen jeder Art bewusst auf. Die Filme sind daher wie folgt konzipiert (in Anlehnung an Biehler & Kempen, 2016; Kempen, 2019):

- Zu Beginn des Videos wird zunächst der zu beweisende Satz rein formal genannt. Anschließend wird die Voraussetzung in eine inhaltlich-anschauliche oder generische Darstellung übersetzt.
- Die inhaltlich-anschaulichen oder generischen Beweise bauen sich nach und nach auf. Dabei werden die Möglichkeiten der digitalen Werkzeuge vor allem beim inhaltlich-anschaulichen Beweisen durch Dynamisierungen ausgenutzt: Darstellungen am Rechenstrich bauen sich auf, verschmelzen, verschieben sich ...

- Beim Kommentieren der Beweise wird vor allem darauf geachtet, dass die Sprache der jeweiligen Anschauung verwendet und die gezeigten Beweis-konzepte sprachlich verallgemeinert werden (Biehler & Kempen, 2016).
- Abschließend wird die Schlussfolgerung der Argumentation nochmals in Zusammenhang mit dem zu beweisenden Satz bzw. dem veranschaulichten Inhalt gebracht (in der Regel über Sprache).

Da das Verständnis für derartig inhaltlich-anschauliche und auch generische Beweise und Visualisierungen davon abhängig ist, ob und inwiefern der Betrachtende den zu beweisenden oder zu veranschaulichenden Satz, die anschauliche Darstellung sowie das im Beweisvideo Gesagte selbstständig miteinander verknüpft (Kempen, 2019), wurden im Projekt Variationen der einzelnen Beweisvideos zur vertiefenden Auseinandersetzung entwickelt:

- *Abbrechender Sprechertext*: Der zu beweisende Sachverhalt wird gezeigt sowie die Voraussetzungen für den Beweis erläutert. Anschließend verstummt der Sprecher. Die Animation hingegen läuft weiter. Die Studierenden sollen versuchen, einen eigenen Sprechertext zu schreiben.
- *Unkorrekter Sprechertext*: Von Fehlern anderer zu lernen, kann den Verstehens- und Erkenntnisprozess maßgeblich beeinflussen. Zudem können solche fehlerhafte Sprechertexte die angehenden Lehrkräfte dafür sensibilisieren, wie wichtig eine eindeutige Sprache beim inhaltlich-anschaulichen oder generischen Beweisen ist. Diese Filme stoppen nach Klärung der Voraussetzung. Eine Zwischeneinblendung signalisiert, dass die folgende Kommentierung des Beweises nicht angemessen ist. Die Studierenden sollen überlegen, an welchen Stellen der Sprechertext verbessert werden muss, und korrigierte Sprechertexte erstellen.
- *Auswahlantworten*: Im Beweisvideo bleibt offen, welcher Satz bewiesen wird. Dazu wird der Beweis gezeigt, aber nicht kommentiert. Am Ende wird gefragt, welcher Satz in diesem Video bewiesen wurde. Aus verschiedenen Antwortalternativen muss eine begründet ausgewählt werden.

Darüber hinaus hat jedes vollständige Beweisvideo Vorbildfunktion zur Erstellung eigener generischer sowie inhaltlich-anschaulicher Beweise.

Somit können die Beweisvideos und auch die Variationen nicht nur im Rahmen der Vorlesung eingesetzt werden. Vielmehr bieten sich weitere ggf. auch neuartige Einsatzmöglichkeiten an. So können die Beweisvideos auch zur individuellen Unterstützung einzelner Studierender in den Übungen dienlich sein (spontane oder geplante Unterstützung im Bearbeitungsprozess). Ebenso bieten sie die Möglichkeiten neuer Hausaufgabenformate

(Sprechertexte korrigieren, Sprechertexte selbst schreiben, ...). Da alle Filme auf der Webseite *adi.dzlm.de* zu Verfügung gestellt sind, haben die Studierenden jederzeit Zugriff auf sämtliche Videos des Projekts.

Fazit und Ausblick

Das vorgestellte Projekt verfolgt somit das Ziel, Unterstützungsmaterialien zu produzieren, die sich in ihrer Konzeption dazu eignen, gleichermaßen fachliche, aber auch didaktische Kompetenzen bei angehenden Grundschullehrkräften zu fördern. Eine ausführliche Begleitforschung mit Pre- und Posttest sowie aufwändige Interviewstudien konnten aus den Projektmitteln leider nicht finanziert werden, wären aber selbstredend wünschenswert gewesen. Die Rückmeldungen der mit diesen Videos ausgebildeten Studierenden sind allerdings sehr positiv.

Literatur

- Barzel, B., Eichler, A., Holzäpfel, L., Leuders, T., Maaß, K. & Wittmann, G. (2016), Vernetzte Kompetenzen statt träges Wissen – Ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase: Herausforderungen und Lösungsansätze* (S. 33–50). Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Biehler, R. & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte – Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 141–179.
- Feldman, Z. (2012). *Describing pre-service teachers' developing understanding of elementary number of theory topics*. Boston: Boston University.
- Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 19(1), 3–45.
- Götze, D. (2019). Arithmetisches Verständnis bei Grundschulstudierenden fördern – Konzeptionelles und Beispiele aus dem Projekt „Arithmetik digital“. In D. Walter & R. Rink (Hrsg.), *Digitale Medien im Mathematikunterricht der universitären Lehrerbildung* (S. 115–132). Münster: WTM.
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule: theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer: Spektrum.
- Kirsch, A. (1977). Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. *Didaktik der Mathematik*, 5(2), 87–101.
- Kirsch, A. (1979). Beispiele für prämathematische Beweise. In W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.), *Beweisen im Mathematikunterricht. Vorträge des 2. internationalen Symposiums für „Didaktik der Mathematik“ in Klagenfurt* (S. 261–274). Wien: Holder-Pichler-Tempsky.
- Winter, M. (2003). Einstellungen von Lehramtsstudierenden im Fach Mathematik – Erfahrungen und Perspektiven. *mathematica didactica*, 26(1), 86–110.