

Gilbert GREEFRATH, Münster

Mathematisches Modellieren und digitale Werkzeuge

1. Einführung

In den letzten Jahrzehnten wurde das Potenzial der Integration mathematischen Modellierens sowie digitaler Werkzeuge in den Mathematikunterricht umfassend untersucht. Mathematisches Modellieren ist spätestens seit Gründung der ISTRON-Gruppe in Deutschland im Jahr 1990 eine sowohl in der Mathematikdidaktik als auch in der Schulpraxis im deutschsprachigen Raum viel diskutierte Kompetenz. Weltweit wird mathematisches Modellieren immer stärker in Standards und den Mathematikunterricht integriert (Frejd, 2011; Kaiser et al., 2015). Gleichzeitig werden auch digitale Werkzeuge und Medien im Unterricht eingesetzt, und dies hat zu vielen verschiedenen Typen von Modellierungsaufgaben geführt (Drijvers et al., 2016). Auf der einen Seite gibt es offene Modellierungsprojekte, bei denen die Lernenden ein authentisches, offenes, real existierendes Problem in einer technologiereichen Umgebung bearbeiten (Ludwig & Jablonski, 2020). Auf der anderen Seite gibt es Aufgaben, die man nicht unbedingt als Modellierungsaufgaben bezeichnen kann, da sie strukturierte Situationen, fertige mathematische Modelle und künstliche Fragen beinhalten; dennoch dürfen die Lernenden digitale Werkzeuge zu deren Lösung verwenden. Es gibt ein breites Spektrum zwischen diesen beiden Extremen, das das mathematische Modellieren mit digitalen Werkzeugen für Forschung und Praxis sehr interessant macht.

2. Modellieren lernen – mit Unterstützung digitaler Werkzeuge

Mathematische Modellierungsprozesse werden häufig mit Hilfe eines Modellierungskreislaufs (Blum & Leiß, 2005) veranschaulicht und umfassen als wichtige Teilschritte „den Bereich oder die Situation, die modelliert werden soll, in mathematische Begriffe, Strukturen und Relationen [zu] übersetzen, [...] [sowie] Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich oder der entsprechenden Situation [zu] interpretieren und [zu] prüfen.“ (KMK, 2004, S. 8). Zu möglichen sinnvollen Unterstützungsmaßnahmen beim Lernen mathematischen Modellierens gibt es verschiedene empirische Ergebnisse. So kann das Wissen über den Modellierungskreislauf (Tanner & Jones, 1995), das Zurverfügungstellen heuristischer Lösungsbeispiele (Zöttl et al., 2010) oder die Nutzung eines strategischen Lösungsplans (Beckschulte, 2019; Schukajlow et al., 2015) Modellierungsprozesse unterstützen und fördern. Im Detail kann das Erstellen mathematischer und ggf. auch situativer Skizzen (Rellensmann et al., 2017) sowie die Aufforderung, multiple Lösungen

zu erstellen (Schukajlow et al., 2019) zu einer Steigerung der Modellierungskompetenzen beitragen. Auch die Nutzung digitaler Werkzeuge wie GeoGebra beim mathematischen Modellieren wurde detailliert untersucht (Greefrath et al., 2018).

Modellierungskompetenz von Schülerinnen und Schülern kann also mit unterschiedlichen Hilfsmitteln gefördert werden. Ein Beispiel für ein Projekt, das die Untersuchung der Förderung von Modellierungskompetenz in den Blick genommen hat, ist das Projekt LIMo an der Universität Münster (2015-2018). Das Ziel des Projekts war zu untersuchen, ob die Modellierungskompetenz durch digitale Hilfsmittel wie dynamische Geometriesoftware und durch strategische Hilfsmittel wie einen Lösungsplan gefördert werden kann. Dazu wurde im Frühjahr 2016 eine Interventionsstudie im quasi-experimentellen Prä-Post-Follow-Up-Design in 44 neunten Klassen deutscher Gymnasien durchgeführt und anhand eines zuvor entwickelten Modellierungstests mit Items zu Teilkompetenzen die Kompetenzentwicklung der Lernenden gemessen. Die Intervention bestand aus einer Unterrichtsreihe von vier Schulstunden. Die 44 Klassen wurden in drei etwa gleich große Gruppen aufgeteilt. Alle Gruppen bearbeiteten die gleichen Modellierungsaufgaben und es wurde in jeder Stunde eine Modellierungsaufgabe bearbeitet. Eine Gruppe verwendete zusätzlich GeoGebra, die zweite Gruppe verwendete einen fünfschrittigen strategischen Lösungsplan mit kognitiven Lernstrategien in jedem Teilschritt, der für die gesamte Intervention zur Verfügung stand (Beckschulte, 2019) und die dritte Gruppe verwendete keins der beiden Hilfsmittel. Bezüglich des Einsatzes der dynamischen Geometriesoftware wurde vermutet, dass nicht die zum ersten Messzeitpunkt vorhandenen Teilkompetenzen entscheidenden Einfluss auf die Wirksamkeit der Intervention mit oder ohne GeoGebra haben, sondern die Fähigkeiten im Umgang mit der Software eine Rolle spielen. Diese Vermutung wurde insofern bestätigt, als dass keine signifikanten Interaktionseffekte zwischen den Teilkompetenzen zum ersten Messzeitpunkt und der Versuchsgruppe gefunden wurden. Die Unterrichtseinheit mit GeoGebra wirkte sich demnach gleichermaßen auf die Teilkompetenzentwicklung eingangs starker sowie schwacher Schülerinnen und Schüler aus. Bei den Analysen der erhobenen Daten zeigt sich allerdings, dass in keiner der betrachteten Teilkompetenzen der Faktor Versuchsgruppe einen signifikanten Einfluss hat (Hankeln, 2019).

Innerhalb der Gruppe mit dynamischer Geometriesoftware wurde darüber hinaus der Zusammenhang zwischen programmbezogener Selbstwirksamkeitserwartung, also der eigenen Fähigkeit spezifische Software (z. B. dynamische Geometriesoftware) zu bedienen (Agarwal et al., 2000), und der Teil-

kompetenz Mathematisieren sowie den Einstellungen zur dynamischen Geometriesoftware analysiert. Programmbezogene Selbstwirksamkeitserwartung und Einstellungen zur Software sind signifikant korreliert. Lernende, die sich in ihren Werkzeugkompetenzen sicherer fühlen, beurteilen die Software auch positiver und umgekehrt. Es kann auch gezeigt werden, dass die programmbezogene Selbstwirksamkeitserwartung ein signifikanter Prädiktor für die Mathematisierungsleistung ist. Mit einer kleinen Effektgröße verbessern Lernende mit einer höheren programmbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung ihre Mathematikkompetenz mehr als Schüler mit einer niedrigeren Selbstwirksamkeitserwartung (Greefrath et al., 2018).

3. Digitale Medien und Werkzeuge – zum Lehren und Lernen mathematischen Modellierens

Die Bildungsstandards (KMK, 2012) sehen das Potenzial digitaler Mathematikwerkzeuge in vier Bereichen. Dies deckt sich mit Ergebnissen vieler Studien. Ein Bereich ist die Möglichkeit mathematische Zusammenhänge zu entdecken (Burrill et al., 2002) und konzeptuelle Fähigkeiten zu fördern (Ellington, 2006; Kieran & Drijvers, 2006), ein zweiter die Möglichkeiten zur Verwendung vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten (Barzel et al., 2005; Burrill et al., 2002; Hoyles & Lagrange, 2010; Weigand & Weth, 2010), ein dritter die Möglichkeit zur Reduktion schematischer Abläufe und ein vierter die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge einschließlich selbstreguliertem Lernen und individuellem Feedback (Bimba et al., 2017; Jedtke & Greefrath, 2019). Außerdem können digitale Werkzeuge kooperative Sozialformen unterstützen und Lehrpersonen entlasten (Barzel, 2012). Digitale Medien können darüber hinaus als digitale Lernpfade (Roth et al., 2015), z. B. der Lernpfad „Quadratische Funktionen erkunden“ auf unterrichten.zum.de (Jedtke, 2018), und digitale Mathematik-Schulbücher, z. B. net-schulbuch.de, mit signifikant umgestalteten oder neu erschaffenen Aufgaben, die ohne digitale Medien nicht möglich wären, zu einer Neudefinition von Mathematikunterricht (Hamilton et al., 2016) führen.

Lernende können mit digitalen Werkzeugen wie grafikfähigen Taschenrechnern mit realen Daten effektiver arbeiten (Burrill et al., 2002), in realitätsbezogenen Kontexten effektiver Problemlösefähigkeiten erwerben (Huntley et al., 2000) und Modellierungs- und Kommunikationskompetenzen erwerben (Bruder et al., 2010). Digitale Werkzeuge werden beim Modellieren zum Berechnen, zur Datenbeschaffung, zum Visualisieren und zum Kontrollieren genutzt (Arzarello et al., 2012; Doerr & Zangor, 2000). Beim mathematischen Modellieren mit digitalen Werkzeugen können diese etwa insbesondere in den ersten Schritten (Schaap et al., 2011), an verschiedenen Stellen

(Daher & Shahbari, 2015) oder während des gesamten Modellierungsprozesses eingesetzt werden (Confrey & Maloney, 2007). Diese speziellen Übersetzungsprozesse zum digitalen Werkzeug können in einem erweiterten Modellierungskreislauf (Greefrath et al., 2018) dargestellt werden, der neben der Realität („Rest der Welt“) und der Mathematik auch das digitale Werkzeug berücksichtigt (Savelsbergh et al., 2008). Möglicherweise beschreibt ein integrierter Kreislauf in bestimmten Situationen Modellierungsprozesse mit digitalen Werkzeugen besser (Greefrath & Siller, 2017). Die vielfältige Werkzeugnutzung ist nur durch gezielten Unterricht zu erreichen (Brown, 2015; Geiger et al., 2003).

4. Modellieren lehren – mit Hilfe digitaler Medien und Werkzeuge

Die professionelle Kompetenz von Lehrkräften kann aufbauend auf Shulman (1986) mit unterschiedlichen Modellen beschrieben werden, in denen zentrale Kompetenzbereiche von Lehrkräften beschrieben werden (Baumert & Kunter, 2013; Blömeke & Kaiser, 2014). Davon ausgehend sowie mit theoretisch abgeleiteten Kompetenzdimensionen von Borromeo Ferri und Blum (2010) wurde ein Modell konkret für das Lehren mathematischen Modellierens entwickelt. Auf der Basis dieses Strukturmodells wurde ein Testinstrument zum Lehren mathematischen Modellierens entwickelt (Klock & Wess, 2018). Die Ergebnisse der Pilotierung zeigen, dass das Strukturmodell zum Lehren mathematischen Modellierens in der konzeptualisierten Form empirisch bestätigt werden konnte (Klock et al., 2019).

Die Implementation von Lehr-Lern-Laboren ermöglicht frühzeitig den Einbezug von Praxiselementen in das Lehramtsstudium. Ein wichtiges Ziel von Lehr-Lern-Laboren in der Lehrerbildung ist die Professionalisierung angehenden Lehrkräfte durch eine gemeinsame Reflexion über Lehr-Lern-Prozesse (Putnam & Borko, 2000). An der Universität Münster wurde das mathematikdidaktische Lehr-Labor MiRA+ mit dem Schwerpunkt Modellieren entwickelt. Im Rahmen einer Studie wurde untersucht, inwieweit im Lehr-Labor MiRA+ Aspekte der modellierungsspezifischen Diagnose- und Aufgabenkompetenz bei angehenden Lehrkräften gefördert werden können. Dazu wurden mit Hilfe eines Paper-Pencil-Fragebogens im Prä-Post-Design, Daten von Lehramtsstudierenden erhoben. Durch die Teilnahme an Lehr-(Lern-)Laboren zum mathematischen Modellieren zeigen sich signifikante Zuwächse im Bereich der diagnostischen Kompetenz als Aspekt der professionellen Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens mit großem bzw. mittlerem Effekt, während keine Veränderungen in der Baseline durch die wiederholte Testbearbeitung auftreten (Klock et al., 2019; Wess, 2020).

5. Fazit und Ausblick

Derzeit stehen die effektive Förderung der Modellierungskompetenzen der Lernenden sowie die Lehrerbildung im Mittelpunkt der Forschung. In diesem Kontext werden Instrumente entwickelt und analysiert, die den Lernenden helfen sollen, Modellierungsprobleme selbstständig zu bearbeiten und Lehrpersonen auf verschiedene Weise unterstützen (Vorhölter et al., 2019). Digitale Medien spielen in diesem Kontext eine wichtige Rolle und beeinflussen Modellierungsprozesse, wie qualitative und quantitative Studien zeigen. Dazu werden auch weitere Aspekte wie Selbstwirksamkeitserwartung und Heterogenität in den Blick genommen. Der Kompetenzzuwachs von Studierenden im Lehr-Lern-Labor zum Modellieren insbesondere durch dort erstellte Modellierungsaufgaben mit digitalen Medien ist vielversprechend. Das Spektrum der digitalen Medien kann hier noch erweitert werden. Die deutsche Modellierungsdebatte zeigt, so Gloria Stillman bei der ICME 13 in Hamburg, eine gesunde Lebendigkeit und ein sich ausweitendes Feld mit erweiternder Forschungsbasis.

Literatur

- Agarwal, R., Sambamurthy, V. & Stair, R. M. (2000). Research Report: The Evolving Relationship Between General and Specific Computer Self-Efficacy – An Empirical Assessment. *Information Systems Research*, 11(4), 418–430. <https://doi.org/10.1287/isre.11.4.418.11876>
- Arzarello, F., Ferrara, F. & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: The role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 31(1), 20–30. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrr027>
- Barzel, B. (2012). *Computeralgebra im Mathematikunterricht: Ein Mehrwert – aber wann?* Waxmann.
- Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.). (2005). *Computer, Internet & Co im Mathematikunterricht*. Cornelsen.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2013). The COACTIV Model of Teachers' Professional Competence. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers* (S. 25–48). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5_2
- Beckschulte, C. (2019). *Mathematisches Modellieren mit Lösungsplan: Eine empirische Untersuchung zur Entwicklung von Modellierungskompetenzen*. Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-27832-8>
- Bimba, A. T., Idris, N., Al-Hunaiyyan, A., Mahmud, R. B. & Shuib, N. L. (2017). Adaptive feedback in computer-based learning environments: A review. *Adaptive Behavior*, 25(5), 217–234. <https://doi.org/10.1177/1059712317727590>
- Blömeke, S. & Kaiser, G. (2014). Theoretical Framework, Study Design and Main Results of TEDS-M. In S. Blömeke, F.-J. Hsieh, G. Kaiser & W. H. Schmidt (Hrsg.),

- International Perspectives on Teacher Knowledge, Beliefs and Opportunities to Learn* (S. 19–47). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6437-8_2
- Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Borromeo Ferri, R. & Blum, W. (2010). Mathematical modelling in teacher education – Experiences from a modelling seminar. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2046–2055. www.inrp.fr/editions/cerme6
- Brown, J. P. (2015). Visualisation Tactics for Solving Real World Tasks. In G. A. Stillman, W. Blum & M. Salett Biembengut (Hrsg.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (S. 431–442). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_36
- Bruder, R., Damp, S. & Wiederstein, G. (2010). *TIM Taschencomputer im Mathematikunterricht*. Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur.
- Burrill, G., Allison, J., Breaux, G., Kastberg, S., Leatham, K. & Sanchez, W. (2002). *Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics: Research Findings and Implications for Classroom Practice* (Texas Instruments, Hrsg.). Michigan State University.
- Confrey, J. & Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Hrsg.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Bd. 10, S. 57–68). Springer US. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_4
- Daher, W. M. & Shahbari, J. A. (2015). Pre-Service Teachers’ Modelling Processes through Engagement with Model Eliciting Activities with a Technological Tool. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(S1), 25–46. <https://doi.org/10.1007/s10763-013-9464-2>
- Doerr, H. M. & Zangor, R. (2000). Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. *Educational Studies in Mathematics*, 41(2), 143–163. <https://doi.org/10.1023/A:1003905929557>
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y. & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education: A Concise Topical Survey*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4>
- Ellington, A. J. (2006). The Effects of Non-CAS Graphing Calculators on Student Achievement and Attitude Levels in Mathematics: A Meta-Analysis. *School Science and Mathematics*, 106(1), 16–26. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18067.x>
- Frejd, P. (2011). An investigation of mathematical modelling in the Swedish national course tests in mathematics. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 947–956.
- Geiger, V., Galbraith, P., Renshaw, P. & Goos, M. (2003). Choosing and Using Technology for Secondary Mathematical Modelling Tasks – Choosing the Right Peg for the Right Hole. In *Mathematical Modelling in Education and Culture* (S. 126–140). Elsevier. <https://doi.org/10.1533/9780857099556.3.126>
- Greefrath, G., Hertleif, C. & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50(1–2), 233–244. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6>

- Greefrath, G. & Siller, H.-S. (2017). Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools. In G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematical Modelling and Applications* (S. 529–539). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_44
- Hamilton, E. R., Rosenberg, J. M. & Akcaoglu, M. (2016). The Substitution Augmentation Modification Redefinition (SAMR) Model: A Critical Review and Suggestions for its Use. *TechTrends*, 60(5), 433–441. <https://doi.org/10.1007/s11528-016-0091-y>
- Hankeln, C. (2019). *Mathematisches Modellieren mit dynamischer Geometrie-Software: Ergebnisse einer Interventionsstudie*. Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23339-6>
- Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Hrsg.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain: The 17th ICMI Study* (Bd. 13). Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Huntley, M. A., Rasmussen, C. L., Villarubi, R. S., Sangtong, J. & Fey, J. T. (2000). Effects of Standards-Based Mathematics Education: A Study of the Core-plus Mathematics Project Algebra and Functions Strand. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 328. <https://doi.org/10.2307/749810>
- Jedtke, E. (2018). Digitales Lernen mit Wiki-basierten Lernpfaden: Konzeption eines Lernpfads zu Quadratischen Funktionen. In G. Pinkernell & F. Schacht (Hrsg.), *Digitales Lernen im Mathematikunterricht* (S. 49–60). Franzbecker.
- Jedtke, E. & Greefrath, G. (2019). A Computer-Based Learning Environment About Quadratic Functions with Different Kinds of Feedback: Pilot Study and Research Design. In G. Aldon & J. Trgalová (Hrsg.), *Technology in Mathematics Teaching* (S. 297–322). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19741-4_13
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357–383). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_13
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The Co-Emergence of Machine Techniques, Paper-and-Pencil Techniques, and Theoretical Reflection: A Study of Cas use in Secondary School Algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(2), 205–263. <https://doi.org/10.1007/s10758-006-0006-7>
- Klock, H. & Wess, R. (2018). *Lehrerkompetenzen zum mathematischen Modellieren*. ULB Münster. <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:6-35169679459>
- Klock, H., Wess, R., Greefrath, G. & Siller, H.-S. (2019). Aspekte professioneller Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens bei (angehenden) Lehrkräften – Erfassung und Evaluation. In E. Christophel, M. Hemmer, F. Korneck, T. Leuders & P. Labudde (Hrsg.), *Fachdidaktische Forschung zur Lehrerbildung* (S. 135–146). Waxmann.
- KMK (Hrsg.). (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschluss vom 4.12.2003. Luchterhand.
- KMK (Hrsg.). (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Wolters Kluwer.

- Ludwig, M. & Jablonski, S. (2020). MathCityMap—Mit mobilen Mathtrails Mathe drau-
Ben entdecken. *MNU Journal*, 73(1), 29–35.
- Putnam, R. T. & Borko, H. (2000). What Do New Views of Knowledge and Thinking
Have to Say About Research on Teacher Learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4–
15. <https://doi.org/10.3102/0013189X029001004>
- Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of stra-
tegic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical
modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53–78.
<https://doi.org/10.1007/s10649-016-9736-1>
- Roth, J., Süß-Stepancik, E. & Wiesner, H. (Hrsg.). (2015). *Medienvielfalt im Mathema-
tikunterricht*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-06449-5>
- Savelsbergh, E. R., Drijvers, P., van de Giessen, C., Heck, A., Hooyman, K., Kruger, J.,
Michels, B., Seller, F. & Westra, R. H. V. (2008). *Modelleren en computer-modellen
in de β -vakken: Advies op verzoek van de gezamenlijke β -vernieuwingscommissies*.
Freudenthal Instituut voor Didactiek van Wiskunde en Natuurwetenschappen.
- Schaap, S., Vos, P. & Goedhart, M. (2011). Students Overcoming Blockages While
Building a Mathematical Model: Exploring a Framework. In G. Kaiser, W. Blum, R.
Borromeo Ferri & G. Stillman (Hrsg.), *Trends in Teaching and Learning of Mathe-
matical Modelling* (S. 137–146). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_15
- Schukajlow, S., Achmetli, K. & Rakoczy, K. (2019). Does constructing multiple solutions
for real-world problems affect self-efficacy? *Educational Studies in Mathematics*,
100(1), 43–60. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9847-y>
- Schukajlow, S., Kolter, J. & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with
a solution plan. *ZDM*, 47(7), 1241–1254. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0707-2>
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educa-
tional Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Tanner, H. & Jones, S. (1995). Developing Metacognitive Skills in Mathematical Mod-
elling—A Socio-Constructivist Interpretation. In C. Sloyer, W. Blum & I. Huntley
(Hrsg.), *Advances and Perspectives in the Teaching of Mathematical Modelling and
Applications* (S. 61–70).
- Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D. & Schukajlow, S. (2019).
Mathematical Modelling. In H. N. Jahnke & L. Hefendehl-Hebeker (Hrsg.), *Traditions
in German-Speaking Mathematics Education Research* (S. 91–114). Springer Interna-
tional Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_4
- Weigand, H.-G. & Weth, T. (2010). *Computer im Mathematikunterricht: Neue Wege zu
alten Zielen*. Spektrum, Akad. Verl.
- Wess, R. (2020). *Professionelle Kompetenz zum Lehren mathematischen Modellierens:
Konzeptualisierung, Operationalisierung und Förderung von Aufgaben- und Diagno-
sekompetenz*. Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-29801-2>
- Zöttl, L., Ufer, S. & Reiss, K. (2010). Modelling with Heuristic Worked Examples in the
KOMMA Learning Environment. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 143–165.
<https://doi.org/10.1007/s13138-010-0008-9>