Martina GREILER-ZAUCHNER, Klagenfurt

„9·23, rechne ich da 10·23 – 9 oder 10·23 – 23?“

Im vorliegenden Beitrag wird ein charakteristisches Fehlermuster analysiert, das infolge einer fehlerhaften Nutzung des Distributivgesetzes bei Zerlegungen von Multiplikationen in eine Differenz im Zuge einer Umsetzung einer Lernumgebung zu Rechenwegen für die Multiplikation in vier Klassen der dritten Schulstufe mehrfach beobachtet wurde.

Ausgangslage und Zielsetzung

In gängigen Werken der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Literatur zur Arithmetik zählt das Zerlegen in eine Differenz zu den *Strategien der halbschriftlichen Multiplikation* und wird dort den Kategorien *Schrittweises Rechnen* bzw. *Hilfsaufgabe* zugeordnet (Padberg & Benz, 2011, S. 185ff; Wittmann & Müller, 2018, S. 61). Die Fachdidaktik ist sich einig, dass dieser Rechenweg im Zuge der Thematisierung der *halbschriftlichen Multiplikation* und im Rahmen der Behandlung *aufgabenadäquaten Rechnens* in der Grundschule erarbeitet werden sollte. Insbesondere bei besonderen Aufgabenmerkmalen (ein Faktor liegt nahe unter einer Zehnerzahl) bietet sich dieser Rechenweg als vorteilhaft an, wie beispielsweise bei der Lösung der Aufgabe 19·6 als 20·6 – 6, bzw. bei der Lösung von 9·23 als 10·23 – 23.

Rechenwege über Zerlegen in eine Differenz bergen – wie alle anderen Rechenwege auch – mögliche Fehlerquellen, die sich bei der Übertragung des Rechenweges auf verschiedene Aufgaben ergeben. Dazu zählt insbesondere der Fehler der Subtraktion des falschen Faktors, wie etwa in der Überschrift zu diesem Beitrag in der Lösung von 9·23 als 10·23 – 9 (anstelle von 10·23 – 23). Da sich hinter fehlerhaften Rechenwegen häufig eine subjektive Logik auf Basis falsch oder nicht verstandener Rechenwege verbirgt, ist es die Zielsetzung des vorliegenden Beitrags, diese subjektive Logik für das beschriebene Fehlermuster exemplarisch zu verdeutlichen und mögliche Hürden in der Erarbeitung des Rechenweges zu beschreiben.

Methodische Vorgehensweise

Das im vorliegenden Beitrag beschriebene Fehlermuster wurde in Zuge der Umsetzung und Beforschung einer Lernumgebung zum Thema Rechenwege für die Multiplikation in vier Grundschulklassen der dritten Schulstufe (55 Kinder) in Österreich rekonstruiert. Leitend bei der Konzeption und Durchführung dieser Lernumgebung war der forschende Ansatz des Mathematiklernens nach Baroody (2003), der seinen Schwerpunkt sowohl auf den Erwerb von Wissen über Verfahren und Prozeduren als auch über Konzepte

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

und operative Zusammenhänge legt. Als *Universalrechenweg* wurde der Rechenweg auf Basis einer *Zerlegung in eine Summe* unter Nutzung des Distributivgesetzes erarbeitet. Zu den weiteren thematisierten Rechenwegen zählten *Zerlegen in eine Differenz*, *Verdoppeln* und *Gegensinniges Verändern*. Im Zuge der Durchführung veranschaulichten die Kinder die einzelnen Rechenwege am 400er-Punktefeld. Darüber hinaus enthielt die Lernumgebung Aktivitäten zum Begründen und Verbalisieren von Rechenwegen und operativen Zusammenhängen, sowie zum Erkennen und Nutzen besonderer Aufgabenmerkmale für Rechenvorteile. Mit den beteiligten Kindern wurden vor und nach der Umsetzung klinische Interviews zu ihren Rechenwegen und zu zugrundeliegenden mathematischen Zusammenhängen geführt. Die Lehrkräfte wurden zu Wirkungsweisen, Hürden und Bedingungen in der unterrichtlichen Durchführung befragt.

Die Grundlage für die Analysen des vorliegenden Beitrags bildeten die Rechenwege der Kinder zu den Aufgaben 19·6, 9·23 und 8·29 und die Antworten der Lehrkräfte in Bezug auf das vorgestellte Fehlermuster. In Folge werden nun die wichtigsten Analyseergebnisse zusammengefasst:

Zum Fehlermuster: Subtraktion des falschen Faktors

In den Erhebungen nach der Umsetzung der Lernumgebung nutzten rund 50 Prozent der Kinder zur Lösung der Aufgaben 19·6, 9·23 und 8·29 die Zerlegung in eine Differenz. Das Fehlermuster der Subtraktion der falschen Zahl im Zuge der Nutzung von Zerlegen in eine Differenz wurde unter den 55 befragten Kindern neunmal beobachtet. Folgende fehlerhaften Zerlegungen traten auf:

(1) 9·23 als 10·23 – 9 (sechsmal)
(2) 8·29 als 8·30 – 29 (dreimal)

Auffallend war auch, dass das Fehlermuster bei der Aufgabe 19·6 nicht auftrat.

In Abb. 1 sind Hannas Rechenwege zu den Aufgaben 8·29 und 9·23 dargestellt. Hanna rechnete die Aufgabe 8·29 fehlerhaft, indem sie von der Aufgabe 8·30 den falschen Faktor subtrahierte. Die Aufgabe 9·23 jedoch, die das Aufgabenmerkmal des 9er an der Einerstelle im ersten Faktor aufweist, löste sie korrekt durch Subtraktion von 10·23 – 23. Möglicherweise legte Hanna sich das falsche Schema zurecht, dass immer der zweite Faktor, oder vielleicht auch immer der zweistellige Faktor zu subtrahieren sei, unabhängig davon, ob dieser das Aufgabenmerkmal enthält oder nicht.

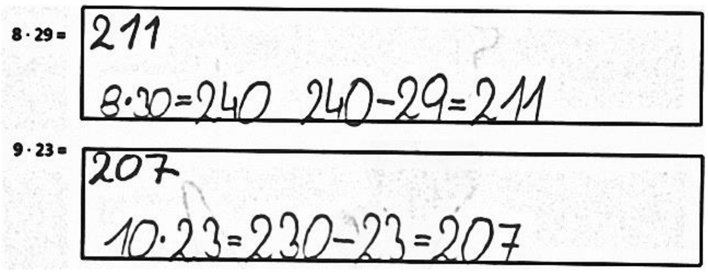

Abb. 1: Hannas Rechenwege für 8·29 und 9·23 durch Zerlegen in eine Differenz – einmal fehlerhaft durch Subtraktion des falschen Faktors (oben) und einmal korrekt (unten)

Auch die Lehrkräfte in den Interviews bemerkten, dass beim Zerlegen in eine Differenz während der Umsetzung immer wieder die Frage auftrat, welcher der beiden Faktoren nun zu subtrahieren sei. Sie wiesen überdies darauf hin, dass die Schwierigkeit beim Veranschaulichen des Rechenweges durch Zerlegen in eine Differenz am 400er-Punktefeld bzw. am Tausenderstreifen insbesondere darin lag, dass abhängig von der Position des Faktors mit dem Aufgabenmerkmal und der Darstellungsweise der Aufgabe der Malwinkel einmal nach oben bzw. einmal nach links verschoben werden musste. Diese Schwierigkeit kann anhand der Aufgaben 9·23 und 8·29 wie folgt verdeutlicht werden:

Um 9·23 als 10·23 – 23 am Tausenderstreifen zu veranschaulichen, wird in der Darstellungsweise in Abb. 2 der Malwinkel um eine Reihe nach *oben* verschoben. Bei Interpretation der Multiplikation als Multiplikator mal Multiplikand wird der Multiplikand *einmal weniger oft genommen*.

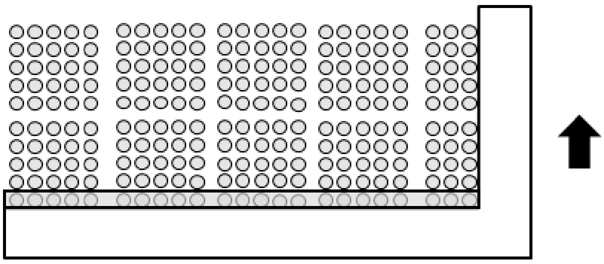

Abb. 2: Veranschaulichung von 9·23 als 10·23 – 23 am Punktefeld – der Multiplikand wird *einmal weniger oft genommen*

Wird jedoch das Aufgabenmerkmal des zweiten Faktors genutzt, wie etwa bei der Zerlegung der Aufgabe 8·29 als 8·30 – 8, so wird in der Darstellungsweise in Abb. 3 der Malwinkel um eine Spalte nach *links* verschoben. Bei Interpretation der Multiplikation als Multiplikator mal Multiplikand wird hier jedoch *gleich oft mal jeweils eins weniger genommen*.

Je nach Position des Faktors mit dem genutzten Aufgabenmerkmal ergeben sich bei der Veranschaulichung des Rechenweges am Punktefeld unterschiedliche Verschieberichtungen des Malwinkels und ebenso unterschiedliche Interpretationen für die zugrundeliegenden operativen Beziehungen.

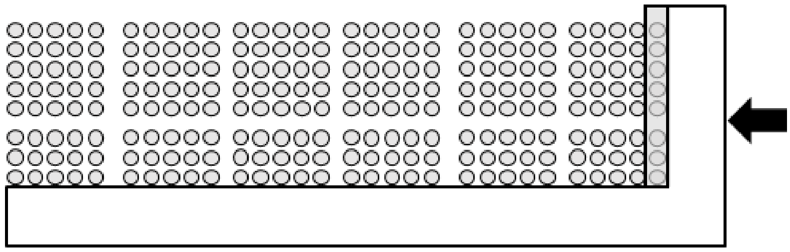

Abb. 3: Veranschaulichung von 8·29 als 8·30 – 8 am Punktefeld – es wird *gleich oft mal jeweils eins weniger genommen*

Für drei Kinder war vermutlich der operative Zusammenhang leichter nachzuvollziehen, wenn das Aufgabenmerkmal im ersten Faktor auftrat. Sie nutzten zur Lösung der Aufgabe 8·29 vor dem Berechnen das Kommutativgesetz: 8·29 = 29·8 = 30·8 – 8

Eine weitere Schwierigkeit kann, wie bereits erwähnt, in der Darstellungsweise bzw. Sichtweise der Malaufgabe am Punktefeld liegen. Im beforschten Unterricht wurde mit den Kindern eine Hauptsichtweise vereinbart, 8·29 sollte, um das Kommunizieren zu erleichtern, als 8 Reihen zu je 29 Punkten gedeutet werden. Eine Darstellung der Aufgabe 8·29 als 8 Spalten zu je 29 Punkten wäre natürlich genauso richtig. Bei dieser Sichtweise würde sich allerdings im Zuge der Veranschaulichung des Rechenweges von 8·29 als 8·30 – 8 – im Vergleich zur Darstellungsweise in Abb. 3 – eine Verschiebung des Malwinkels nach *oben* ergeben.

Resümee

Aus der dargelegten Analyse kann abgeleitet werden, dass das Veranschaulichen der Rechenwege für Zerlegen in eine Differenz mithilfe von Punktefeldern unverzichtbar ist, um Einsicht in die zugrundeliegenden operativen Beziehungen zu erlangen. Insbesondere sollte in diesem Zusammenhang im Unterricht auch thematisiert werden, an welcher Position der Faktor mit dem genutzten Aufgabenmerkmal auftritt bzw. welche Interpretationen sich für die operativen Beziehungen ergeben, um entgegenzuwirken, dass Kinder die falsche Zahl subtrahieren bzw. sich fehlerhafte Schemen zurechtlegen.

Literatur

Baroody, A. J. (2003). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. In A. J. Baroody & A. Dowker (Hrsg.), *The development of arithmetic concepts and skills* (S. 1–33). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (4. Auflage). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Neufassung, 1. Auflage). Seelze: Kallmeyer; Klett.