

Stephan Michael GÜNSTER, Würzburg, Nicolai PÖHNER, Würzburg,  
Jan Franz WÖRLER, Würzburg & Hans-Stefan SILLER, Würzburg

## Validierung beim mathe- und informatischen Modellieren – am Beispiel "Seilkamerasystem"

Seilkamerasysteme, bei denen eine TV-Kamera an zwei oder vier Tragseilen schwebt, kommen bei Großveranstaltungen wie Fußballspielen, Konzerten und sonstigen Events zum Einsatz. Positionsänderungen der Kamera werden durch gezielte Anpassungen der Tragseillängen gesteuert. Da die notwendigen Berechnungen der Seillängen über schulgeometrische Kenntnisse (Satz des Pythagoras oder Vektorrechnung) bestimmt werden können, ist die Entwicklung und Programmierung einer Steuerung für Kamerafahren aus mathematischer wie auch informatischer Sicht reizvoll.

### Umsetzung als Vier-Seil-Realmodell

Mit Materialien aus dem Baumarkt und etwas Elektronik lässt sich recht einfach ein Realmodell eines Seilkamerasystems herstellen. Dabei hängt ein Kameramodul an vier Schnüren, deren effektive Länge jeweils über eine von einem Schrittmotor getriebene Winde verändert werden kann (Abb. 1 + 2).

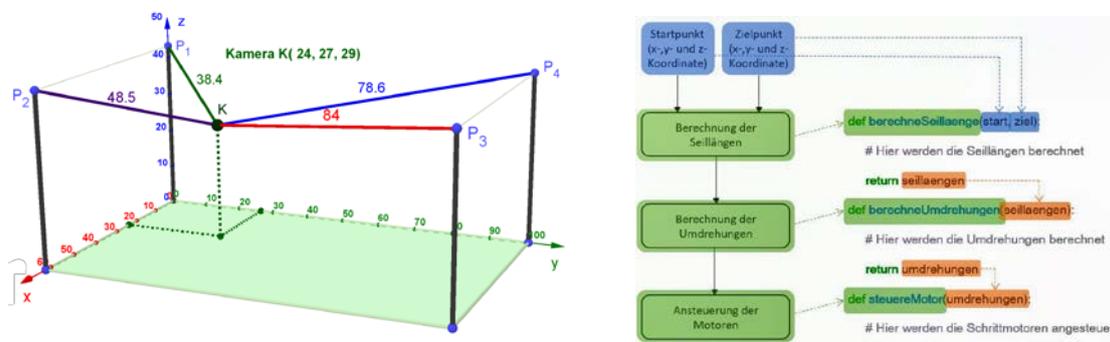


Abb. 1: Modell eines Seilkamerasystems in GeoGebra; die Kamera wird über vier Tragseile positioniert, welche über Winden gesteuert werden (li.). Datenflussdiagramm des informatischen Modells und zugehörige Implementierung (in Python) (re.).

Im Steuerprogramm müssen Seillängen und Differenzen ermittelt und in Motorumdrehungen umgerechnet werden: Um die Kamera von einem Startpunkt  $P_1$  zu einem gewünschten Zielpunkt  $P_2$  zu bewegen, werden für beide Punkte die jeweiligen Längen der vier Tragseile berechnet. Für jede der vier Schnüre ergibt sich somit eine Längendifferenz, die der zugehörige Schrittmotor entsprechend auf- oder abrollen muss. Zur informatischen Umsetzung der mathematischen Beziehungen auf einem MiniComputer (z. B. *Raspberry Pi*) eignen sich einfache, schulnahe Programmierumgebungen (z. B. *Scratch*) genauso wie höhere Sprachen (z. B. *Python*) (Abb. 1, re.)

## **Umsetzung als Simulation**

Es kann sinnvoll sein, zunächst mit einer Computersimulation – im Sinne eines virtuellen Modells (vgl. Siller & Greefrath 2010) – statt direkt am Realmodell zu arbeiten, da Änderungen und Anpassungen in der digitalen Umsetzung flexibler vorgenommen werden können und sich Hinweise auf Schwachstellen in der Formulierung des formalisierten mathematischen oder informatischen Systems ergeben (Bossel, 1989, S. 14) – ohne, dass das Realmodell Schaden nimmt. Hierfür eignen sich z. B. *GeoGebra* (Abb.1, li.) wie auch *Mathlab* oder *GNU Octave*.

## **Vergleich: Mathematische und informatische Modellierung**

Im Rahmen der Umsetzung eines solchen Projekts bedienen sich sowohl die Mathematik als auch die Informatik *Modellen*, um die Realität zu beschreiben. Für ein Gelingen gilt es, die jeweils fachlich geprägten Modellierungsprozesse eng zu verzahnen, und so scheint zunächst ein theoretischer Vergleich der Ansätze beider Sichtweisen hilfreich: Die Mathematik verwendet *statische* bzw. *analytische Modelle*, wohingegen die Informatik *dynamische* bzw. *simulative Modelle* nutzt (vgl. Günster, Pöhner, Wörler & Siller, im Druck). Schubert und Schwill (2011) argumentieren, dass „[d]ie Informatik damit unter Rückgriff auf mathematische und informatische Modelle eine virtuelle dynamische Welt [kreiert]“ und das analytische Modell der Mathematik somit „zum Leben erweckt“. Diesen Prozess beschreiben beide Fächer durch Modellierungskreisläufe (vgl. Blum & Leiß, 2005; [GI], 2008), welche jeweils die Konstruktion von Modellen, das Arbeiten mit ihnen sowie ihre Analyse umfassen. Beide Kreisläufe betonen dabei am Ende eines Durchgangs die Phase der *Validierung der Ergebnisse* (Mathematik) bzw. der *Modellkritik* (Informatik). Wie diese Phase im Projekt „Seilkamerasystem“ umgesetzt werden kann, zeigt das Folgende.

## **Validierung bzw. Modellkritik mittels Videoanalyse**

Um zu prüfen, ob die Ergebnisse der Simulation (virtuelles Modell) auch im Realmodell tragbar sind, werden die Kamerafahrten per Videoanalysetool validiert. Dabei wird die Bewegung der Kamera im Realmodell videografiert und das Video anschließend in einer Software (z. B. *viana* oder *Tracker*) auf Realmaße kalibriert. Die Software bestimmt dann Bild für Bild die jeweilige Position der im Video markierten Kamera und gibt deren Koordinaten in Abhängigkeit von der Zeit aus. Aus der Theorie erwartete Verläufe lassen sich dann mit den Daten aus den Simulationen aber auch den Videoanalysedaten vergleichen und Abweichungen ermitteln.

## Beispiel: Geradlinige Verbindung zwischen Start- und Zielpunkt

Wir betrachten exemplarisch die Modellierung einer geradlinigen Kamerafahrt von  $P_1$  zu  $P_2$ , für die es verschiedene Modellierungsmöglichkeiten gibt; dabei stellte sich die Modellierung als Rasterung des Weges als erfolgversprechendste dar. Hierfür wird die Strecke von  $P_1$  zu  $P_2$  in eine Anzahl  $n$  von gleichlangen Teilstrecken und damit  $n - 1$  Zwischenzielpunkte zerlegt, die von der Steuerung nacheinander angefahren werden. In der Computersimulation zeigt sich, dass durch diese Art der Modellierung größere Abweichungen vom geplanten Verlauf minimiert werden. (vgl. Günster et al., 2020)

Für die Videoanalyse wird die Kamera so eingestellt, dass die Kamerabewegung in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse der Kamera verläuft; dies erleichtert die Analyse, weil die Bewegung aus Sicht der Kamera nur zwei-dimensional verläuft. Andernfalls könnte eine weitere Kamera, senkrecht zur ersten angebracht, fehlende Tiefeninformationen aufzeichnen. Referenzpunkte am Realmodell, etwa an Masten und am Spielfeld, werden zur Kalibrierung der Analysesoftware auf Realmaße verwendet.

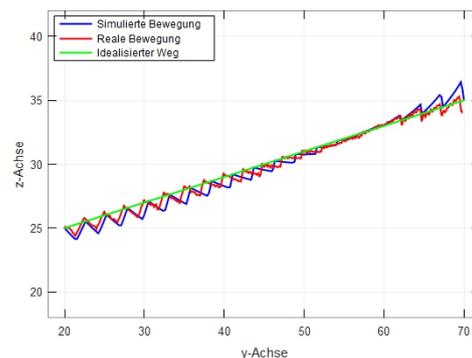
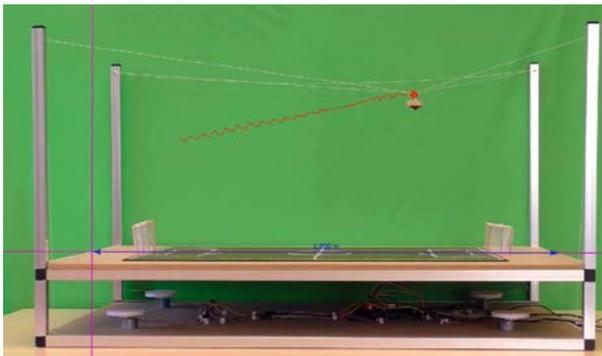


Abb. 2: Videoanalyse der tatsächlichen Kamerabewegung im Vier-Seil-Realmodell (Elektronik und Winden sind unterhalb des Spielfelds montiert) (li.); Vergleich von Theorie, Simulation und realer Bewegung (re.)

Die Videoanalyse (Abb. 2, li.) zeigt deutliche „Zacken“ im postulierten geradlinigen Verlauf der Bewegung, nur im letzten Drittel verläuft die Bewegung teilweise nahezu geradlinig. Die „Zacken“ treten aber auch in der Simulation auf (Abb. 2, re.) und stecken somit in der Modellierung. Ursache hierfür ist, dass die Motoren die Seillänge mit konstanter und für alle vier Pfosten gleicher Drehgeschwindigkeit verändern, die zeitliche Änderung der Seillänge jedoch keinen linearen funktionalen Zusammenhang mit konstanter Ableitung darstellt. Es sind allerdings auch Abweichungen zwischen Simulation und Realmodell (= Videoanalysedaten) sichtbar. Ursachen können z. B. in der Kalibrierung des Modells selbst, in der Kalibrierung der Analysesoftware, in Messungenauigkeiten (auch: der Bauteile) und Effekten durch die Perspektive der Aufnahme liegen.

Die „Zacken“ zeigen aber auch, dass die Modellierungsvariante mit Hilfe von Zwischenpunkten im Prinzip funktioniert: jede „Zacke“ steht für einen dieser Punkte. Eine Verfeinerung der Rasterung, also das Erhöhen von  $n$ , führt erwartungsgemäß auch im Realmodell zu einem „glatteren“ Verlauf.

### **Zusammenfassung und Ausblick**

Das Thema „Modellierung eines Seilkamerasystems“ fußt grundlegend vor allem auf mathematischen Inhalten. Diese lassen sich mit informatischen Mitteln in ein Computerprogramm umsetzen, das zur Steuerung eines Realmodells dienen kann. Simulationen und Videoanalysetools unterstützen dabei den Prozess der Modellierung und Implementierung.

Das Thema lässt sich auch als Schülerprojekt durchführen und ist dann ein fächerkoordinierendes Beispiel dafür, wie mathematisches und informatisches Modellieren sich gegenseitig bedingen und zusammenwirken können, um ein Problem zu lösen (vgl. Günster et al., im Druck).

### **Literatur**

- Bossel, H. (1989). *Simulation dynamischer Systeme*. Braunschweig u. a.: Vieweg
- Blum, W. & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der ‚Tanken‘-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 8–21.
- [GI] Gesellschaft für Informatik (2008). Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule: Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe I. *LOG IN*, 28 (150/151) [Beilage]
- Günster, S. M., Pöhner, N., Wörler, J. F. & Siller, H.-S. (im Druck). Mathematisches und informatisches Modellieren verbinden am Beispiel „Seilkamerasystem“. In Bracke, M., Ludwig, M. & Vorhölter, K. (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 7*.
- Schubert, S. & Schwill, A. (2011). *Didaktik der Informatik*. Heidelberg: Spektrum
- Siller, H.-S. & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. & Arzarello, F. (Hrsg.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2136–2145).