

Alina GUTHER, Paderborn

Vorstellungen zu gebrochenen Zahlen in Lehrbüchern der Primarstufe

Mit der systematischen Erarbeitung gebrochener Zahlen wird in Deutschland regulär in der 5. Klasse begonnen, genutzt werden Bruchzahlen allerdings schon in der Primarstufe. Es wird also zunächst in einem neuen Zahlbereich gearbeitet und erst mit großem zeitlichem Abstand erfolgt eine systematische inhaltliche Erschließung. Diese ungewöhnliche Reihenfolge der Erarbeitung eines mathematischen Inhaltes gab den Anlass zu diesem Forschungsprojekt.

Gebrochene Zahlen werden in der Grundschule immer im Zusammenhang mit Größen genutzt. Das geben sowohl die Bildungsstandards (KMK, 2005, S. 11) als auch die Lehrpläne der deutschen Bundesländer vor (u. a. MKJS, 2016, S. 33; MBS & SenBJW, 2015, S. 23, 40). Konkret sind im Mathematik-Lehrplan für die Primarstufe Nordrhein-Westfalens für das Ende der Klasse 4, bezogen auf gebrochene Zahlen, folgende beiden Lernziele formuliert: „Die Schülerinnen und Schüler [...] nutzen im Alltag gebräuchliche Bruchzahlen bei Größenangaben und wandeln in kleinere Einheiten um (z. B. $\frac{1}{4} \text{ l} = 250 \text{ ml}$).“ und „[sie] rechnen mit Größen (auch mit Dezimalzahlen)“ (MSW, 2008, S. 65).

Die Nutzung gebrochener Zahlen in der Grundschule, ohne eine vorherige systematische Einführung (wie sie erst später in den Klassen 5 und 6 erfolgt), scheint jedoch in der Praxis zu diversen Schwierigkeiten zu führen. Auffallen ist dies während meiner praktischen Arbeit mit Kindern mit besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Obwohl die wesentlichen arithmetischen Inhalte der Klassen 1 bis 3 bereits nachgearbeitet waren, hatten nicht wenige SchülerInnen in den Klassen 3 und 4 immer wieder große Schwierigkeiten beim Lösen von Aufgaben, welche Bruchzahlen enthielten. Deshalb stellte sich mir die Frage, wie Schülerinnen und Schülern anschlussfähiges Wissen über Bruchzahlen vermittelt werden kann, ohne dazu bereits in größerem Umfang auf die Inhalte der Sekundarstufe vorzugreifen. Dabei unterstützen sollte ein Blick in die Lehrbücher der Primarstufe, denn in diesen werden ebenfalls Inhalte dargeboten und Aufgaben gestellt, durch die die SchülerInnen lernen mit gebrochenen Zahlen umzugehen, obwohl diese vorher nicht systematisch eingeführt wurden.

Entwicklung eines umfassenden Bruchzahlbegriffs

Zur Entwicklung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs ist der Aufbau von Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und zum Rechnen mit diesen nötig (u.

a. Malle, 2004; Padberg & Wartha, 2017; Wartha, 2009). Ohne Grundvorstellungen entstünde „totes Wissen, das man nicht anwenden kann“ (Malle, 2004, S. 4). Das Vorwissen der SchülerInnen darf dabei jedoch nicht unbeachtet bleiben, denn bei der Erarbeitung eines tragfähigen Bruchzahlbegriffs muss zusätzlich zum Aufbau von Grundvorstellungen die Umwandlung bzw. Rekonstruktion der bereits vorhandenen Konzepte und Vorstellungen zu den natürlichen Zahlen erfolgen (vgl. Prediger, 2008, S. 4; Winter, 1999, S. 2). Eine weitere Hürde bei der inhaltlichen Durchdringung des neuen Zahlbereichs stellen nicht adäquate Vorstellungen, sogenannte Fehlvorstellungen, dar (für die Dezimalschreibweise: Heckmann, 2006), welche im Forschungsprozess ebenfalls in den Blick genommen werden.

Beispiele für den Umgang mit gebrochenen Zahlen in Lehrbüchern der Primarstufe

Die Sichtung von Lehrbüchern der Primarstufe ergab Hinweise darauf, dass dem Aufbau von Grundvorstellungen und der Wandlung „alter“ Vorstellungen wenig Beachtung geschenkt wird. Zudem wurden Beispiele für das Herantragen von Fehlvorstellungen an die SchülerInnen gefunden.

In dem Schülerband *Welt der Zahl 3* findet sich neben der Abbildung eines Preisschildes (1,25 €) und der entsprechenden Euro-Münzen (1 €, 20 ct und 5 ct) die Erläuterung „Das Komma trennt Euro und Cent.“ (Dingemans & Rinkens, 2015, S. 44). In den zugehörigen Lehrermaterialien wird über die Funktion des Kommas folgendes dargelegt: „Die Kinder sollen erkennen, dass es kürzer und somit sinnvoller ist, eine Größe mit zwei Maßeinheiten mit Komma zu schreiben, da das Komma die Funktion hat, die größere von der kleineren Einheit zu trennen.“ (Dingemans, 2016, S. 139). Die eigentliche Funktion des Kommas, nämlich ganzzahlige Teile von Anteilen einer Zahl zu trennen und der Gedanke, dass Bruchzahlen Anteile eines Ganzen beschreiben, wird mit dieser Funktionsbeschreibung verschleiert.

Auch in anderen Lehrbuchreihen sind Inhalte zu finden, welche nicht auf die Aneignung übertragbaren Wissens abzielen. In dem Lehrbuch *Denken und Rechnen 3* findet sich in einem „Wortspeicher“ eine tabellarische Übersicht, die verdeutlichen soll, wann eine Zahl vor und wann sie nach dem Komma steht: $1000\text{ cm} = 10,00\text{ m}$; $100\text{ cm} = 1,00\text{ m}$; $10\text{ cm} = 0,10\text{ m}$; $1\text{ cm} = 0,01\text{ m}$ (vgl. Buschmeier 2018, S. 79). Eine solche Tabelle, die sich die SchülerInnen scheinbar einprägen sollen (deshalb „Wortspeicher“), würde sich erübrigen, wenn mit den Schülerinnen und Schülern ein inhaltliches Verständnis dafür erarbeitet würde, warum bei der Umwandlung von 10 cm in Meter die 1 hinter dem Komma und bei 100 cm in Meter die 1 vor dem Komma steht.

In vielen Schulbüchern für die Primarstufe und den zugehörigen Lehrerbänden stößt man auf ähnliche „Tricks“ und Informationen, mit welchen das fehlende Grundlagenwissen der SchülerInnen ausgeglichen werden soll. Es stellt sich die Frage, inwiefern dadurch trag- und anschlussfähiges Wissen für die Sekundarstufe erarbeitet wird. Denn grundsätzlich besteht in der mathematikdidaktischen Literatur Einigkeit darüber, dass ein umfassendes Bruchzahlverständnis nur erworben werden kann, wenn sich der „Schwerpunkt von der Beherrschung der Rechenverfahren und der Produktorientierung noch deutlich stärker hin zu einer anschaulichen Fundierung von Grundvorstellungen und einer prozessorientierten Sichtweise“ (Padberg & Wartha, 2017, S. 16) verlagert. Winter fordert ebenfalls, dass „[d]er Erwerb und Gebrauch von Kompetenzen in der Bruchrechnung [...] nicht einseitig syntaktisch orientiert sein [darf] (Einprägen und Exekution von Regeln, die sich auf die Symbole beziehen, wie Komma verschieben, Zähler belassen, Nenner vervielfachen, [...]“ (Winter, 1999, S. 2). Die oben angeführten Lehrbuchauszüge zeigen exemplarisch, dass der Umgang mit Bruchzahlen in der Primarstufe im Widerspruch zur aktuellen Forschung steht.

Das Forschungsprojekt

In diesem Dissertationsprojekt wird in einem ersten Schritt der Frage nachgegangen, welche Vorstellungen zu gebrochenen Zahlen durch die Lehrbücher für die Primarstufe angelegt werden.

Dazu wurden zunächst vier Lehrbuchreihen, die für die Unterrichtung im Fach Mathematik in der Grundschule in Nordrhein-Westfalen zugelassen sind und welche besonders häufig genutzt werden, ausgewählt: *Denken und Rechnen*, *Flex und Flo*, *Welt der Zahl* und *Das Zahlenbuch*. Die ausgewählten Lehrbuchreihen werden mit Hilfe der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse (Kuckartz, 2018) analysiert. Die Aufgaben und Merkkästen werden dabei hinsichtlich der nötigen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und in Bezug auf die wesentlichen Vorstellungsumbrüche untersucht. Wie die oben aufgeführten Beispiele zeigen, erscheint auch die Suche nach möglichen falschen Vorstellungen zu Bruchzahlen sinnvoll.

Darüber hinaus wird die Nutzung der verschiedenen Schreibweisen von Bruchzahlen mit bestimmten Größen einer Clusteranalyse unterzogen. Die vermutete Nutzung der immer gleichen Schreibweisen von Bruchzahlen (als gemeiner Bruch, als gemischte Zahl oder als Dezimalzahl) im Zusammenhang mit bestimmten Größen, scheint das erworbene Wissen für die SchülerInnen ebenfalls nicht übertragbar zu machen. Dass $\frac{1}{2}$ genau das Gleiche wie 0,5 ist, sollte im Sinne eines auf das Verstehen abzielenden Lernens nicht

nur für die Einheit Kilogramm, sondern auch für Stunden und alle anderen Einheiten gelten.

Literatur

- Buschmeier, G. (2018). *Denken und Rechnen. 3*, [Schülerband] ([Grundschule, Bremen, Hamburg, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland, Schleswig-Holstein], Druck A.). Braunschweig: Westermann.
- Dingemans, S. & Rinkens, H.-D. (Hrsg.). (2015). *Welt der Zahl: mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule. 3*, [Schülerbd.] (Für die Grundschule, [Nordrhein-Westfalen, Hessen, Rheinland-Pfalz, Saarland], Dr. A.). Braunschweig: Schroedel.
- Dingemans, S. (2016). *Welt der Zahl: mathematisches Unterrichtswerk für die Grundschule. 3, Lehrermaterialien*. (H.-D. Rinkens, T. Rottmann & G. Träger, Hrsg.) ([Für die Grundschule, Bremen, Hamburg, Hessen, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Rheinland-Pfalz, Saarland, Schleswig-Holstein], Druck A.). Braunschweig: Schroedel.
- Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern: theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos-Verlag.
- Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (4. Auflage). Weinheim Basel: Beltz Juventa.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *Mathematik lehren*, (123), 4–8.
- Ministerium für Bildung, Jugend und Soziales Brandenburg (MBS) & Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Wissenschaft (SenBJW) (Hrsg.). (2015). *Rahmenlehrplan: Jahrgangsstufen 1-10 (Bd. Teil C)*.
- Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (MKJS) (Hrsg.). (2016). *Bildungsplan 2016 – Mathematik (Bd. Bildungsplanhefte-Bildungsplan der Grundschule)*. Villingen-Schwenningen: Neckar-Verlag GmbH.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (MSW) (Hrsg.). (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen* (1. Aufl.). Frechen: Ritterbach.
- Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Auflage.). Berlin: Springer Spektrum.
- Prediger, S. (2008). The relevance of didactic categories for analysing obstacles in conceptual change: Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction*, 18(1), 3–17.
- Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (KMK) (Hrsg.). (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: (Jahrgangsstufe 4)*; [Beschluss vom 15.10.2004]. Neuwied: Luchterhand.
- Wartha, S. (2009). Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs – Didaktische Analysen und empirische Befunde. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 55–79.
- Winter, H. (1999). *Mehr Sinnstiftung, mehr Einsicht, mehr Leistungsfähigkeit im Mathematikunterricht, dargestellt am Beispiel der Bruchrechnung*. RWTH Aachen. <http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ss09/sfd/Bruchrechnen.pdf>. (22.05.2018).