Heike HAGELGANS, Halle a.d.S.

Rechenketten als schulnahe Aufgaben für einen problemorientierten Mathematikunterricht?

Einführung

Der Stellenwert eines problemlösenden Mathematikunterrichts wird gegenwärtig sowohl in der Fachdidaktik als auch unter Lehrkräften in der Schule kontrovers diskutiert. Eine offene Frage betrifft die gewählten Aufgaben: was sind gute Problemaufgaben für den Einsatz in der Schule, die auch zum Lehrplan passen und die die Lehrkräfte bei der Arbeit unterstützen, über das Problemlösen zu unterrichten (Rott & Papadopoloulus, 2019)? Diese Frage ist ebenfalls verknüpft mit der Rolle des Problemlösens im Mathematikunterricht: wird Problemlösen eher als Lernziel und/oder als inhärentes Gestaltungsprinzip von jeglichem Mathematikunterricht aufgefasst (Silver, 1985)? Noch weiter geht der Begriff eines problemorientierten Mathematikunterrichts. Unter ihm firmieren ein Lernen über, für und durch Problemlösen (Fritzlar, 2011), welches auch das Problem Posing (u.a. Silver, 1994) einschließt.

In dieses Spannungsfeld ordnet sich der vorliegende Artikel ein. Er möchte am Format der Rechenketten aufzeigen, inwieweit dieser Aufgabentyp zu einem problemorientierten Mathematikunterricht in der Primarstufe beitragen kann und welche Voraussetzungen dafür erfüllt sein müssen.

Mathematikdidaktische Einordnung

Rechenketten sind ein in der Schule hinreichend bekanntes Aufgabenformat im Bereich der Arithmetik. Sie lassen sich in vielen Lehrmaterialien in unterschiedlicher Form finden. Im PIKAS-Programm (2009) können Rechenketten vorwärts und rückwärts berechnet werden. Es gibt auch Aufgaben, in denen die Start- und die Zielzahl gegeben sind und Zwischenzahlen bzw. Operationen ergänzt werden müssen. Bei mehreren gegebenen Rechenketten sollen ferner Muster erkannt, beschrieben und fortgesetzt werden. Aßmus (2015) nutzt für das Lösen von Zahlenrätseln und Sachaufgaben, die die Strategie des Rückwärtsarbeitens erfordern, die Darstellung von Rechenketten als Unterstützung zum Lösen der Textaufgaben.

Rechenketten in ihrer komplexen Struktur werden ferner für das Erfinden von Rechengeschichten genutzt (Krauthausen, 2018). Rechengeschichten (mit Rechenketten) verknüpfen die mathematische Ebene mit einer Realsituation, so dass vorgegebene Rechenoperationen/Zahlen mit passenden realen Handlungen assoziiert werden müssen. Dies verlangt, dass arithmetische

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Grundvorstellungen und die Fähigkeit zum Rückwärtsarbeiten gut ausgeprägt sind. Das Schreiben von Rechengeschichten gewährt einen Einblick, wie Lernende mit einem Sachkontext umgehen, welche Grundvorstellungen sie zu arithmetischen Inhalten besitzen, wie sie strategisch vorgehen und inwieweit ihre Schreibfähigkeiten entwickelt sind (Kleine & Fischer, 2005).

Einblick in die empirische Studie

Gemäß der aufgeworfenen Frage in der Einleitung wird nun die damit verknüpfte empirische Studie skizziert. Forschungsmethodologisch liegt ihr die fachdidaktische Entwicklungsforschung (Prediger & Link, 2012) zugrunde. Die fachdidaktische Entwicklungsforschung ist eine Unterrichtsentwicklungsforschung. Sie entwirft zunächst innovative Lernumgebungen und prüft diese im Anschluss empirisch. Dieser Design- und Prüfprozess verläuft in mehreren Zyklen. Das Ergebnis ist eine lokale Lehr-Lerntheorie zu ihrem jeweiligen spezifischen Themenschwerpunkt. Ihren Ausgangspunkt nimmt sie in einer Problemidentifikation in Theorie und Praxis. Daran schließt sich die Phase der Verortung von Schwierigkeiten und die Spezifizierung von Lernzielen an.

Bezüglich der Rechenketten wurde zur Erhebung von Schwierigkeiten mit einer vierten Klasse eine diagnostische Einheit durchgeführt, um daraus wichtige Kenntnisse für den Inhalt und die Gestaltung einer passgenauen problemorientierten Unterrichtseinheit mit Rechenketten zu gestalten. Eingegrenzt wird das Feld auf ein Problem Posing: aus einer vorgegebenen Rechenkette mit Endzahl ist eine Rechengeschichte zu schreiben. Zunächst wurde den Kindern eine Rechenkette mit Endzahl vorgegeben und sie sollten die Anfangszahl bestimmen. Dies verlief ohne Probleme. Im Anschluss wurde herausgearbeitet, was alles zu einer vollständigen Rechengeschichte gehört. Dies fiel den Kindern sehr schwer, sind sie doch immer wieder in den Modus der Lösung einer vorgegebenen Sachaufgabe gerutscht. Zuletzt wurde mit den Kindern gemeinsam zur anfangs gegebenen Rechenkette eine Rechengeschichte im Kontext von Bonbons gebildet (Aßmus, 2015).

Nach dieser Hinführung erhielten die 15 Kinder dieser Klasse die Aufgabe, zu einer (neuen) gegebenen Rechenkette eine Rechengeschichte zu schreiben. Die Rechenkette beinhaltet neben der gegebenen Endzahl (6) weitere vier Zahlenfelder, die die Kinder finden sollen. Dazu sind ihnen von der Anfangszahl beginnend vier Rechenoperationen (+3; *3; -6; :4) vorgegeben. Diese Eigenproduktionen der Kinder wurden mit einem deduktiv-induktiven Kategorienschema (Kuckartz, 2014) ausgewertet. Folgende Kategorien beinhaltet das Schema:

- Kontext, Kontextualisierung gemäß der Struktur der Rechengeschichte Grad der Vollständigkeit der Kontextualisierung der Rechenoperationen.
- Arithmetische Grundvorstellungen, Strategie, Nutzung der Zwischenzahlen der Rechenkette in der Rechengeschichte
- Angabe einer korrekten Fragestellung, sprachlich eindeutige Formulierungen der Rechenoperationen.

Ergebnisse und Ausblick

Bezüglich des gewählten Kontextes lässt sich feststellen, dass sieben Kinder den Bonbonkontext der vorangegangenen Beispielaufgabe aufgegriffen haben. Weitere sieben Kinder nutzen einen beispielnahen Kontext mit Euros, Stiften usw. Ein Kind bettet seine Rechengeschichte in eine unrealistische Situation ein. Bei elf Kindern passt deren Kontextualisierung zur Rechenkette mit ihren vorgegebenen Operationen und der Endzahl, bei vier Kindern passt sie nicht zur Struktur der Rechenkette. Neun Lernende haben alle Rechenoperationen vollständig kontextualisiert. Drei Lernende haben nur eine Rechenoperation nicht in einen Kontext eingebettet, weitere drei Kinder haben mehrfach eine Rechenoperation nicht kontextualisiert.

Sieben Kinder zeigen vollständig richtige arithmetische Grundvorstellungen bezüglich der verwendeten Rechenoperationen. Bei vier Kindern ist eine Grundvorstellung falsch assoziiert, bei weiteren vier Kindern sind mehrere arithmetische Grundvorstellungen falsch assoziiert. Aus den Rechengeschichten ist erkennbar, dass sechs Lernende die Rückwärtsstrategie genutzt haben, acht Kinder haben die Rechengeschichte vorwärts aufgeschrieben und ein Kind wechselt zwischen vorwärts und rückwärts. Bei der Analyse der Rechengeschichten fällt auf, dass sieben Kinder in ihrer Rechengeschichte die gegebenen Rechenoperationen und die Endzahl nutzen, acht Lernende arbeiten auch mit den Zwischenzahlen.

Nur ein Schüler gibt eine korrekte Fragestellung an. Zwei Kinder schreiben keine Frage auf. Dreizehn Lernende formulieren eine falsche Fragestellung. Davon fragen zehn Kinder nach der gegebenen Endzahl. Acht Kinder notieren eine sprachlich eindeutige Rechengeschichte in Bezug auf die Rechenoperationen, bei sieben Kindern sind die Angaben eher unpräzise und mehrdeutig.

Für die Spezifizierung der Lernziele und die Weiterarbeit am Design der problemorientierten Unterrichtseinheit heißt das, dass Übungen zur Überführung der Rechenketten in Realsituationen zwar notwendig sind, aber das Hauptaugenmerk auf die Mathematisierung gelegt werden sollte. Für ein Problem Posing, in dem viele Kinder zu guten Ergebnissen gelangen können, ist es u.a. wichtig, dass die arithmetischen Grundvorstellungen beherrscht werden und dass ein korrektes Verständnis der Struktur der Rechenkette vorliegt. Das größte Problem stellt die Formulierung einer korrekten Frage dar. Vermutlich korrespondiert dies mit einem Unverständnis für die Struktur der Rechenkette bezüglich des Rückwärtsarbeitens. Gleichzeitig sollte die mathematikspezifische Fachsprache weiter ausgebaut und in ihrer Benutzung reflektiert werden.

Im Ergebnis dieser Vorstudie ist eine entsprechende Lernumgebung erarbeitet und empirisch geprüft worden. Diese kann bei Interesse bei der Autorin erfragt werden.

Literatur

Aßmus, D. (2015). „Ich rechne das rückwärts." Umkehren von Gedankengängen im Mathematikunterricht. *Praxis Grundschule*. 38(2), 32 – 37.

Fritzlar, T. (2011). Pfade trampeln … statt über Brücken gehen: Lernen durch Problemlösen. *Grundschule,* Heft 11, 32 - 34.

Kleine, M. & Fischer, E. (2005). Welche Aufgabe passt zu dem Term? Möglichkeiten für den Einsatz von Rechengeschichten am Beispiel der Subtraktion und Division von Brüchen. *mathematica didactica* 28(2). 88–103.

Krauthausen. G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 4. Auflage. Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Kuckartz, U. (2014): *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung.* 2. durchgesehene Auflage. Weinheim und Basel: Beltz Juventa.

Pikas (2009). Teilaufgaben Rechenketten. https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_7-Gute-Aufgaben/FM/Modul_7.1/Moderatoren-Material/weitere_Materialien/Teilaufgaben/FM_ZO_Moderator_Teilaufgaben_Rechenketten.pdf (23.12.2019).

Prediger, S. & Link, M. (2012). Fachdidaktische Entwicklungsforschung – Ein lernprozessfokussierendes Forschungsprogramm mit Verschränkung fachdidaktischer Arbeitsbereiche. In H. Bayrhuber et al. (Hrsg.), *Formate Fachdidaktischer Forschung. Empirische Projekte – historische Analysen – theoretische Grundlegungen*. Fachdidaktische Forschungen, Band 2. (S. 29–46). Münster et al.: Waxmann.

Rott, B. & Papadopoulus, I. (2019). The role of problem solving in school mathematics. In A. Kuzle et al. (Hrsg.), *Implementation research on problem solving in school settings. Proceedings of the 2018 joint conference of ProMath and the GDM working group on problem solving*. (S. 215–217). Münster: WTM-Verlag.

Silver, E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. In E.A. Silver (Hrsg.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (S. 247–266). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E.A. (1994). On mathematical problem posing. In *For the learning of mathematics*. 14(1), 19-28.