Erik HANKE, Bremen

Vorstellungen im intuitiven mathematischen Diskurs

Vorstellungen nehmen bekanntlich einen hohen Stellenwert in der Mathematikdidaktik ein: Zum einen geben sie Aufschluss darüber, wie Lernende oder auch Lehrende mathematischen Inhalten einen persönlichen Sinn verleihen, andererseits können sie genutzt werden, um Lehre zu strukturieren und tragfähige Lehr-Lern-Materialien anzubieten. Für die Ableitung einer reellwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen und das bestimmte Integral solcher Funktionen gibt es fachdidaktisch gründliche und weit verbreitete (Grund-) Vorstellungen (vgl. Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016).

Für die analogen Konzepte in der Funktionentheorie, also Ableitung und Integration (komplexe Wegintegrale) von Funktionen einer komplexen Veränderlichen, gibt es Ansätze seitens der Hochschulmathematikdidaktik, die geometrische Interpretation der komplexen Ableitung als Drehstreckung (Needham, 2011) von Studierenden zu untersuchen (Troup, Soto-Johnson, Karakok & Diaz, 2017), sowie eine Expertenbefragung zur komplexen Ableitung und zum komplexen Wegintegral (Oehrtman, Soto-Johnson & Hancock, 2019). Needham (2011) bietet sogar ein eigens der Anschaulichkeit gewidmetes Lehrbuch zur Funktionentheorie. Einige der fachlich reichhaltigen Beziehungen zwischen den komplexen und reellen (Weg-) Integralen stelle ich darüber hinaus anderenorts zusammen (Hanke, eingereicht).

In diesem Beitrag wird eine Konzeptualisierung von *Vorstellungen* vorgeschlagen, die im Sinne des diskursiven Ansatzes der *commognition* (Sfard, 2008; Lavie, Steiner & Sfard, 2019) Vorstellungen als Elemente persönlicher, intuitiver mathematischer Diskurse auffasst und untersuchbar macht. Diese Konzeptualisierung findet in einer Multi-Fall-Studie mit Expert*innen Anwendung (Hanke, im Druck, eingereicht) und ermöglicht einen Einblick in die Konstruktionsprozesse, mit denen Expert*innen grundlegenden Konzepten der Funktionentheorie anschauliche Bedeutung beimessen und Bezüge zwischen reellem und komplexem, sowie intuitivem und formalem Diskurs herstellen. Im Vortrag wird der hier ausgebreitete theoretische Rahmen erläutert und mit Beispielen aus der Funktionentheorie angereichert.

Grundzüge der commognition

In der *commognition* (Sfard, 2008) werden Denken und Kommunizieren als eine Konstrukteinheit betrachtet, gemäß der Denken das intrapersonelle Äquivalent zu zwischenmenschlicher Kommunikation ist; daher auch der

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Neologismus aus *communication* und *cognition*. Mathematiktreiben wird verstanden als die Entwicklung und Teilhabe an mathematischen Diskursen, die je nach Umständen und Organisation (z. B. in Fachdisziplinen, in der Schule, in der Forschung, …) unterschiedlich ausfallen können (vgl. Nardi, Ryve, Stadler & Viirman, 2014, S. 183–185). Diskurse sind dabei durch *Schlüsselworte* samt ihrem Gebrauch, *Narrative* (genau genommen *endorsed narratives*, grob übersetzt *gültige* oder *anerkannte Narrative*), *visuelle Mediatoren* sowie *Routinen* charakterisiert. Bei mathematischen Objekten handelt es sich um diskursive Objekte, die rekursiv innerhalb eines Diskurses erzeugt werden; mithin sind es situierte „*persönliche Konstrukte*, obwohl sie ihren Ursprung in öffentlichen Diskursen haben" (Sfard, 2008, S. 166, Übers. EH, Hervorh. i. O.). Narrative sind Äußerungen über die Objekte des jeweiligen Diskurses sowie die Zusammenhänge zwischen Objekten oder Operationen, die mit den Objekten ausgeführt werden können; visuelle Mediatoren sind sämtliche sichtbare Medien, die im jeweiligen Diskurs genutzt werden können; und Routinen sind Metaregeln, die Diskursteilnehmer*innen explizit oder implizit nutzen, um Narrative zu produzieren, ihre Gültigkeit abzuwägen sowie Objekte zu verändern, oder auch Prozeduren, die durch eine unterstellte Erwartungshaltung von Teilnehmer*innen des Diskurses ausgeübt werden (Sfard, 2008, S. 129–135, 223–260). Lavie, Steiner und Sfard (2019) gehen davon aus, dass Personen implizit auf Routinen aus dem sogenannten *precedent-search-space* zurückgreifen, also auf für sie verwandt erscheinende Aufgaben und (kommunikative) Handlungen, die sie entweder bereits selbst angewandt oder bei denen sie jemand anderes beobachtet haben.

Kognitive Sichtweisen auf fachdidaktische Konzepte wie „Lernen" oder „Verstehen" werden in der commognition durch diskursive Konstrukte ersetzt, was einerseits pragmatisch und andererseits durch diese partizipationistische Sichtweise auf individuelle sowie gemeinschaftliche Entwicklung von Diskursen notwendig ist (Sfard, 2019). Es werden nun *Vorstellungen* als fachdidaktisches Konstrukt aus einer diskursiven Perspektive erschlossen.

Vorstellungen im intuitiven mathematischen Diskurs

Es steht außer Frage, dass konkurrierende fachdidaktische Konzeptionen davon herrschen, was unter einer Vorstellung zu verstehen sei. So hat sich z. B. das Begriffspaar aus *concept images* und *concept definitions* (Tall & Vinner, 1981) etabliert, bei dem zwischen zu einem mathematischen Begriff individuell assoziierte kognitive Strukturen und Definitionen bzw. Definitionsversuchen von Lernenden unterschieden wird. In der Diskussion um die *Grundvorstellungsidee* hat sich ein fruchtbares Wechselspiel zwischen präskriptiver und empirisch-deskriptiver Sichtweise aufgebaut (z. B. vom Hofe &

Blum, 2016), wobei sich die Frage stellen lässt, inwiefern Grundvorstellungen gleichermaßen eine stoffdidaktisch-präskriptive wie auch kognitiv-psychologische Kategorie darstellen.

Wenn Mathematiktreibende darüber kommunizieren, wie sie sich ihre persönliche Bedeutung eines Begriffs vergegenwärtigen, konstituieren sie einen spezifisch mathematischen Diskurs, der hier als *intuitiver mathematischer Diskurs* bezeichnet sei. *Vorstellungen* sind dann Narrative aus solchen intuitiven mathematischen Diskursen, die durch visuelle Mediatoren gestützt sein können (vgl. ausführlicher Hanke (eingereicht)). Sie drücken aus, was für die Person selbst als anschauliche, intuitive Aussage über ein mathematisches Objekt gilt und was sie nutzen kann, um sich selbst oder anderen ein mathematisches Objekt zu erklären, ohne notwendig auf formalen mathematischen Diskurs zurückzugreifen. Bilder, Verweise auf mathematische Sätze oder als verwandt erkannte andere mathematische Objekte sowie Symbole und deren Manipulation sind dabei eingeschlossen und zählen im diskursiven Zusammenhang mit zu den Vorstellungen, welche dadurch den intuitiven Diskurs der oder des Einzelnen charakterisieren.

Verstehen ist in der commognition eine Bezeichnung, die Personen nutzen, um anzuzeigen, inwiefern sie einem Diskurs folgen können (Sfard 2008, S. 302). Dies beinhaltet konstruktimmanent die Narrative der Person, die sie um das Wort Verstehen o. ä. ausbreitet. Im intuitiven Diskurs erscheinen intuitives Verständnis bzw. persönliche Sinnkonstruktionen in den darüber formulierten Narrativen: Vorstellungen zeigen sich dabei als sensible, individuell geformte Narrative, die fachdidaktisch als „stories über stories“ rekonstruierbar sind (Sfard, 2019, S. 225). Konstitutiv ist dabei, was die oder der Einzelne für sich selbst zu ihrem oder seinem intuitiven, anschaulichen Verständnis zählt bzw., welche persönliche Bedeutung ein mathematischer Inhalt für sie oder ihn hat. Es geht weniger um formalen mathematischen Diskurs, als vielmehr um Heuristiken, mit denen sich eine Person einen Begriff erschließt bzw. die als Routinen rekonstruierbar sind (vgl. die heuristische Funktion von Routinen bei Lavie, Steiner & Sfard, 2019).

Der jeweilige intuitive Diskurs ist dabei von den Anlässen abhängig, unter denen die jeweilige Person ihre Vorstellungen ausdrückt, mithin freilich auch von der Selbsteinschätzung, was für sie dazu zählt. So werden sich explizit eingeforderte Nennungen von Vorstellungen, anschaulichen oder geometrischen Bedeutungen zu einem mathematischen Objekt i. A. von Vorstellungen unterscheiden, die bei der Bearbeitung von Aufgaben auftreten oder helfen könnten, sowie von der Bewertung fremder Vorstellungen auf Nachvollziehbarkeit oder Konsensfähigkeit (Hanke & Schäfer (2017) sprechen hier von einer Dreiteilung „kommunikativer Abbilder“ von Vorstellungen).

Danksagung

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01JA1912 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt beim Autor.

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016, Hrsg.). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin: Springer.

Hanke, E. & Schäfer, I. (2017). Students’ view of continuity: An empirical analysis of mental images and their usage. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME10, February 1-5, 2017) (S. 2081–2088). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Hanke, E. (2019, im Druck). Anschauliche Deutungen des komplexen Wegintegrals und der Cauchyschen Integralformel von Expert*innen der Funktionentheorie. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019.* Regensburg, Germany.

Hanke, E. (2020, eingereicht). *Intuitive mathematical discourse about the complex path integral.* Eingereicht für INDRUM 2020 (Bizerte, Tunesien).

vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). „Grundvorstellungen“ as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 225–254.

Lavie, I., Steiner, A. & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics,* 101(2), 153–176.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E. & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of calculus. *Research in Mathematics Education,* 16(2), 182–198.

Needham, T. (2011). *Anschauliche Funktionentheorie* (2., verb. Aufl.; N. Herrmann & I. Paschen, Übersetz.). München: Oldenbourg.

Oehrtman, M., Soto-Johnson, H. & Hancock, B. (2019). Experts’ construction of mathematical meaning for derivatives and integrals of complex-valued functions. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education,* 5, 394–423.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge: University Press.

Sfard, A. (2019). On the need for theory of mathematics learning and the promise of ‘commognition‘. In P. Ernest (Hrsg.), *The philosophy of mathematics education today* (S. 219–228). Cham: Springer.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(2), 151–169.

Troup, J., Soto-Johnson, H., Karakok, G. & Diaz, R. (2017). Developing students’ geometric reasoning about the derivative of complex valued functions. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 3, 173–205.