

Mutfried HARTMANN, Karlsruhe, Thomas BORYS, Karlsruhe,  
Hidemichi OKAMOTO, Gifu & Tetsushi KAWASAKI, Gifu (Japan)

## **Der „Fermi-Tree“ – Prozesse und Strukturen beim Lösen von Fermi-Fragen erfassen**

### **Einleitung**

Lösungsprozesse bei Modellierungsaufgaben können nach Ärlebäck (2009) mithilfe des Modelling Activity Diagramms (MAD) analysiert werden. Ärlebäck überträgt dabei die Beobachtungskategorien von Schoenfeld (1985) für das Problemlösen auf den Modellierungsprozess wie bei Borromeo Ferri (2006) beschrieben und integriert zusätzlich in sein Beobachtungstableau die für Fermi-Aufgaben zentrale Aktivität des Schätzens. Zur Rekonstruktion individueller Modellierungsprozesse entwickelt Borromeo Ferri (2011) das Instrument individueller Modellierungsverläufe. Empirisch kann sie damit zeigen, dass sich die Modellierungsphasen bei individuellen Prozessen weiter ausdifferenzieren lassen und die Begrifflichkeiten des zugrunde liegenden Modellbildungskreislaufes zu grob sind. Voigt (2013) zieht diese Begrifflichkeiten grundsätzlicher in Frage, da kognitionsbedingt in einfachen Kontexten zwischen Realität und Mathematik nicht klar unterschieden werden kann und eine solche Unterscheidung auch grundsätzliche wissenschaftsphilosophische Fragen aufwirft. Er schlägt eine alternative Rekonstruktion eines Lösungsprozesses beruhend auf der Idee eines mathematischen Graphen vor. Dieser Vorschlag zeichnet den Lösungsweg inhaltlich präzise und in seiner zeitlichen Abfolge nach, klammert aber ergänzende didaktische Begrifflichkeiten weitgehend aus. Eine gemeinsame Berücksichtigung zwischen inhaltlichen Aspekten und Aktivitäten im Kontext von Modellierung und Fermi-Fragen wurde mit der Weiterentwicklung des MAD zum MCAD (Hartmann et al., 2019) versucht. Das MCAD soll im Kontext der Kreativitätsförderung die Interaktion von inhaltlichen Ideenabschnitten mit Modellierungsaktivitäten und Fermi-typischen Schätzprozessen abbilden. Aufgrund der Schwierigkeit, Aufgabenlösungen eindeutig und unabhängig vom Beobachter in Ideenabschnitte zu gliedern, ist das MCAD allerdings nur eingeschränkt anwendbar.

### **Anforderungen**

Ein Beobachtungsinstrument sollte einfach zu handhaben sein, eine gute Interraterreliabilität aufweisen und relevante Daten effizient erfassen. Idealerweise ermöglicht es, Lösungsprozesse aus verschiedenen didaktischen Blickwinkeln aufzuzeichnen und macht diese Prozesse auch komplexen

rechnergestützten Analysen zugänglich. Dabei sollen einerseits die inhaltlichen Aspekte der Lösung, die Lösungsstruktur und deren Komplexität abgebildet werden können. Andererseits soll das Instrument ermöglichen, auf ausgewählte Aktivitäten und deren Qualität und Häufigkeit zu fokussieren. Diese Aktivitäten sollten z.B. allgemein aus dem Blickwinkel des Modellierens, aber auch aus dem spezifischen Blickwinkel der didaktischen Chancen von Fermi-Aufgaben betrachtet werden können. Dazu kann z.B. auf eine Liste typischer „Fermi-Aktivitäten“ (vgl. Büchter et al., 2007) zurückgegriffen werden. Wir stellen im folgenden Abschnitt mit dem *Fermi-Tree* ein Beobachtungsinstrument vor, das Prozesse beim Lösen von Sachaufgaben unterschiedlichster Couleur – insbesondere auch von Fermi-Fragen – in diesem Sinne abbilden kann.

### Beobachtungsinstrument Fermi-Tree an einem Beispiel erläutert

Der Fermi-Tree ist ein gerichteter Graph, dessen Kanten den erzielten Teilergebnissen und dessen Knoten verschiedenen Tätigkeiten entsprechen. In vielen Fällen ist er damit ein *gewurzelter Baum* des Typs *In-Tree*. An einem Lösungsbeispiel zu folgender Fermi-Frage soll die Idee des Fermi-Trees genauer erläutert werden:

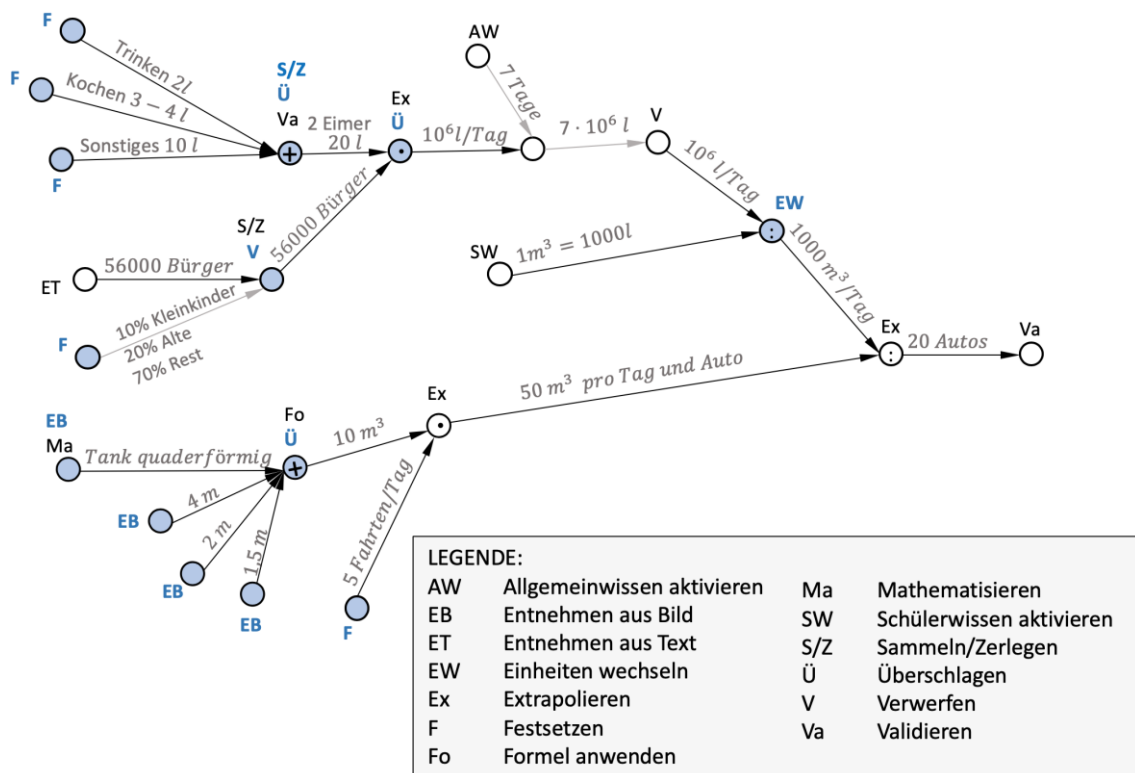
*In einer Stadt ereignet sich eine Katastrophe. 56.000 Bürger können eine Woche lang kein Wasser verwenden. Der Bürgermeister denkt darüber nach, das notwendige Wasser mit einem Wasserversorgungsfahrzeug wie dem unten zu liefern. Wie viele Wasserversorgungsfahrzeuge braucht er dafür?*

Gesamtabmessung  
des Tankwagens:

Länge: 5,8m  
Breite: 2,2m  
Höhe: 2,5m



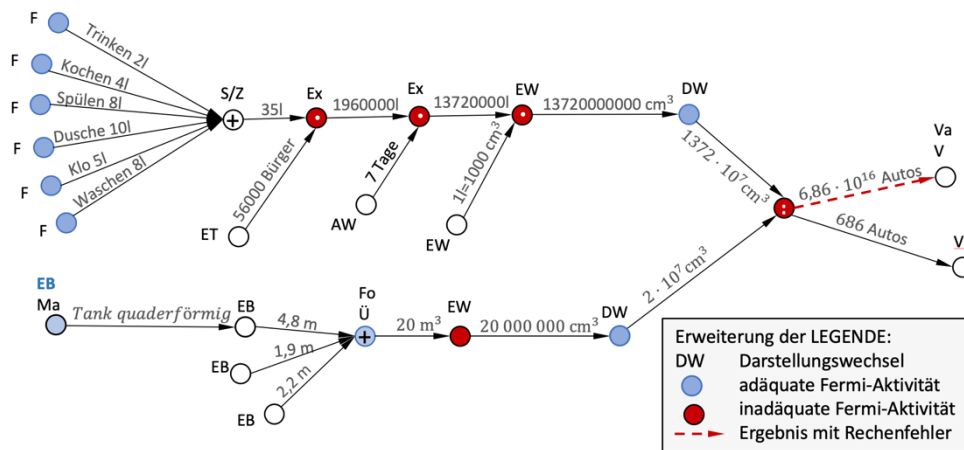
Im folgenden Beispiel (s. Abb. unten) wurde der Lösungsprozess mit den spontanen Festlegungen (F) der Mengen für den dringendsten täglichen Wasserverbrauch einer Person begonnen (2l Trinken, 3-4l Kochen, 10l Sonstiges). Dies entspricht einer Sammlungsaktivität (S/Z). Die mathematische Operation war eine Addition (+). Das Ergebnis dieser Addition wurde gar nicht ausgerechnet, sondern gleich durch den handlicheren Überschlagswert 20l ersetzt (Ü). Zwei Eimern Wasser entsprechend wurde dieser als realistisch erachtet. Damit fand gleichzeitig eine Validierung (Va) statt. Die Idee, den unterschiedlichen Bedarf von Erwachsenen, Kindern und Alten zu berücksichtigen (S/Z), wurde als irrelevant für die Grobabschätzung wieder verworfen (V). Von dem Bedarf eines Bürgers wurde auf den Bedarf aller Bürger mittels eines Überschlags extrapoliert (Ex, Ü).



Die  $10^6 l$  wurden zunächst auf eine Woche (AW) hochgerechnet (Ex). Dieser Weg aber sogleich wieder verworfen, da erkannt wurde, dass eigentlich nur der tägliche Bedarf mit dem täglichen Versorgungsnachschub übereinstimmen muss, die Woche also eine irrelevante Information darstellt (V). Der Tank des abgebildeten Tankwagens wurde als Quader modelliert (Ma, EB) und die Seitenlänge jeweils mittels Bild und Textangaben ohne sichtbare Vorgehensweise abgeschätzt (EB, ET) und schließlich mittels Formel (Fo) der Tankinhalt grob überschlagen (Ü). Nach einer spontanen Festlegung von 5 Fahrten pro Tag wurde auf die tägliche Versorgungsleistung eines Tanklasters hochgerechnet (Ex). Nach einem Einheitenwechsel wurde auf eine Mindestanzahl von 20 Tankwagen geschlossen (Ex).

### Analysemöglichkeiten

Bei Bedarf können die Aktivitäten an den Knoten dabei auch noch ergänzend mit Bewertungen und die Kanten mit Zeitpunkten versehen werden. In dem hier vorgestellten Beispiel wird durch Färbung des Graphen sichtbar gemacht, inwieweit der spezifischen Anforderung an eine Fermi-Frage, nämlich rasch und effizient zu einer groben Abschätzung zu gelangen, Rechnung getragen wurde. Da durchgängig adäquate Sammlungen, Festsetzungen, Überschläge und Einheitenwechsel getätigt wurden, ist die Aufgabe in dieser Hinsicht gut gelöst. Der folgende Graph hingegen zeichnet diesbezüglich einen schwächeren Lösungsversuch nach. Besonders ungeschickte Aktivitäten im Sinne einer Fermi-Frage sind hier zusätzlich rot hervorgehoben.



Trotz aller Unterschiede in der Lösung weisen beide Graphen aufgabenbedingte Ähnlichkeiten auf und zeigen damit die didaktischen Chancen, die in der Aufgabe stecken. Mit der Erfassung dieser Eigenheiten können mit dem Fermi-Tree nicht nur Lösungen und Lösende, sondern auch die Aufgaben selbst effektiv beschrieben und typisiert werden.

Mathematisch können die Knoten als Vektoren aufgefasst werden, deren Komponenten Tupel  $(a, v)$  sind. Dabei bedeuten 1 bzw. 0 als ersten Eintrag, dass eine Aktivität  $i$  vor- bzw. nicht vorliegt. Der zweite Eintrag  $v$  steht für eine Bewertung dieser Aktivität. Damit wird vor allem bei großen Datensätzen die Repräsentation in spatio-temporalen Datenbanken und die Analyse von Trajektorien z.B. durch Clustering (vgl. Fuchs et al., 2017) ermöglicht.

## Literatur

- Ärleback, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331–364.
- Büchter, A., Herget, W., Leuders, T. & Müller, J. (2007). *Die Fermi-Box. Modellieren – Problemlösen – Argumentieren*. Stuttgart: Ernst Klett.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiation of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95.
- Borromeo Ferri, R. (2011). *Wege zur Innenwelt des mathematischen Modellierens*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Fuchs, K. & Henning, P. (2017). Visualizing Learning Behavior as Spatio-Temporal Trajectories. In Eibl, M. & Gaedke, M. (Hrsg.), *INFORMATIK 2017, Lecture Notes in Informatics (LNI)*, Gesellschaft für Informatik, (S. 1703–1707). Bonn: Köllen. <https://informatik2017.de/files/2017/10/proceedings2.pdf> (06.01.2020)
- Hartmann, M., Borys, Th., Kawasaki, T. & Okamoto, H. (2019). Observing Characteristics in Solving Fermi-Tasks by Modelling and Creating Activity Diagram. *Proceedings of the 2019 International Joint Conference on Information, Media and Engineering (IJCIME)*, 97–100, Osaka: IEEE.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Voigt, Jörg (2013). Eine Alternative zum Modellierungskreislauf. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013*, 1046–1049. Münster: Waxmann.