Lisa HEFENDEHL-HEBEKER, Duisburg-Essen

Mathematik und Logik – ein unzertrennliches Paar

Es ist Allgemeingut, dass die Mathematik „streng logisch“ vorgeht. Das bedeutet, dass mathematisches Argumentieren nur dann als korrekt gilt, wenn es verbindlichen Normen des Schließens folgt. Die Wissenschaft von der Ordnung und den Gesetzen unseres Denkens bezeichnen wir als Logik. Der folgende Beitrag möchte der Frage nach dem Zusammenhang von Mathematik und Logik, seinen Ursprüngen und seiner Bedeutung für die Mathematikdidaktik genauer nachgehen.

1. Ursprünge

Die wissenschaftliche Methode als Ablösung für mythologisches Denken hat ihre Ursprünge in der griechischen Antike. „Philosophie- und Wissenschaftsgeschichte lehren, dass Vernunft und wissenschaftliche Rationalität im europäischen, heute universal gewordenen Sinne ihren Anfang im griechischen Denken […] nahmen.“ (Mittelstraß, 2014, S. 275). Äußerungsformen sind das Reflektieren über die in der Praxis gewonnenen Erkenntnisse und das Bedürfnis des Erklärens und Begründens, verbunden mit klaren Zielsetzungen (Nestle, 1975):

- Die Wirklichkeit in vernünftiger Rede, im begrifflichen Ausdruck zutreffend wiedergeben,
- dabei Strukturen und innere Beziehungen erfassen,
- aus Sichtbarem und aus der Erfahrung Werkzeuge machen, mit deren Hilfe man zum Unsichtbaren und Unbekannten vordringen kann.

Eine Schlüsselrolle in dieser Entwicklung spielte die Mathematik, wie sie mit Thales und Pythagoras etwa um 530 v. Chr. begann und ihren vorläufigen Höhepunkt in den Elementen des Euklid um 300 v. Chr. fand. Artmann (1999, Vorwort) sieht in diesem Werk die wichtigste frühe Quelle für eine Auffassung von Mathematik, die für mehr als zweitausend Jahre prägend war. Wegweisend wurde dabei die Inkommensurabilität als Prototyp einer wissenschaftlichen Entdeckung, die aus reinem Streben nach Erkenntnis gewonnen ist und zeigt, dass Menschen ihr Wissen allein durch schlussfolgerndes Denken erweitern können (Artmann, 1999, S. 229 f.; siehe auch Hefendehl-H., 2019). Die Möglichkeiten des Denkens selbst waren also wesentlich an dem Fortschritt beteiligt. Zum Beispiel erlaubte die Schlussform „reductio ad absurdum“ (Beweis durch Widerspruch) die ersten Unmöglichkeitsbeweise und die ersten exakten Aussagen über das „Unendliche“ (Ebbinghaus et al., 1983, S. 26).

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

2. Die aristotelische Logik

Es liegt somit nahe, dass die griechischen Denker schließlich auch begannen, sich mit der Ordnung und den Gesetzen des Denkens selbst zu befassen. Ansätze hierzu befinden sich etwa bei Plato mit folgender Leitidee: „Gott hat uns die Sehkraft anerschaffen und verliehen, damit wir die Bewegungen der Weltvernunft am Himmel gewahr werden und sie zur Regulierung der Bewegungen unserer eigenen Vernunfttätigkeit benutzen.“ (Plato, Timaios, zitiert nach Scholz, 1967, S. 22).

Damit hatte Plato einen starken Einfluss auf seinen Schüler Aristoteles (384-322 v. Chr.). Dieser gilt als der eigentliche Begründer der Logik, auch wenn er den Ausdruck „logisch“ nie in seinem heute geläufigen Sinne gebrauchte (Scholz, 1967, S. 6). Sein später als „Organon“ bezeichnetes Werk „ist noch heute die menschlich schönste und lehrreichste Einführung in die Logik überhaupt“ und bis zur Gegenwart grundlegend geblieben (ebd., S. 27). Es enthält insbesondere

- eine Urteilslehre mit dem für die Aristotelische Logik fundamentalen Satz des ausgeschlossenenen Dritten,
- die Regeln des gültigen Schließens, die „Syllogistik“,
- die Lehre von den Axiomen, Lehrsätzen und Definitionen.

Damit hat Aristoteles die später von Kant so genannte formale Logik geschaffen (ebd., S. 3), und zwar „in einer Präzision und Vollständigkeit, über die man erst mit der modernen mathematischen Logik seit Frege wesentlich hinausgekommen ist.“ (Mittelstraß, 1995, S. 165 f.) Einen Schluss charakterisiert Aristoteles zum Beispiel so: „Schluss ist eine Rede, bei welcher bei Setzung einiger (Sachverhalte) etwas anderes als das Gesetzte mit Notwendigkeit zutrifft aufgrund dessen, dass diese (gültig) sind. […] Es bedarf keines von außen hinzugenommenen Begriffes, dass die Notwendigkeit zustande kommt.“ (Aristoteles, 2019, S. 122). Der bekannteste unter den aristotelischen Syllogismen ist wohl der „modus ponens“: „Alle X sind E. N ist ein X. Also: N ist E.“ Die Notwendigkeit eines solchen Schlusses ist ohne inhaltliche Deutung der vorkommenden Ausdrücke und ohne Begleitüberlegungen einsichtig. Frege präzisiert im Vorwort seiner Begriffsschrift (Frege, 1964, S. IX) den formalen Charakter so: „Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besonderen Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht.“

3. Bedeutung für die Mathematikdidaktik

„Die Mathematik ist enger als andere Wissenschaften mit der Logik verknüpft; denn fast die ganze Tätigkeit des Mathematikers besteht im Schließen. […] Außer dem Schließen gehört auch das Definieren zur Tätigkeit des Mathematikers. […] Das Schließen aber und das Definieren ist logischen Gesetzen unterworfen. Daraus folgt, daß die Logik für die Mathematik eine größere Wichtigkeit hat als für andere Wissenschaften.“ (Frege, 2001, S. 92). Somit ergibt sich die Frage, welchen Stellenwert die Logik im Mathematikunterricht einnehmen sollte.

Dazu ist zunächst eine relativierende Feststellung zu treffen. Aus Sicht der Logik ist mathematisches Schließen und Beweisen letztlich nur ein Umformen von Ausdrücken nach bestimmten Regeln und somit eine formale Tätigkeit. Wie Walsch (1975, S. 70) ausführt, „tritt dieser formale Charakter des Beweisens in der üblichen mathematischen Praxis jedoch nur stellenweise deutlich hervor. Im Allgemeinen hat man bei Beweisführungen nicht nur die formale Struktur, sondern eine ganz bestimmte inhaltliche Interpretation der vorkommenden Ausdrücke im Auge. Das trifft insbesondere auch auf die Behandlung von Beweisen im Unterricht zu.“

Aus Analysen des außerwissenschaftlichen Argumentierens hat Toulmin (1958) ein Schema entwickelt, das zusätzlich zu den Komponenten „Prämissen“ und „Konklusion“ noch begleitende Legitimierungen („warrant“), stützende Überzeugungen („backing“), modale Operatoren wie „vermutlich“ oder „höchst wahrscheinlich“ und Ausnahmebedingungen enthält, somit insbesondere „von außen hinzugenommene Begriffe“ (Aristoteles, siehe oben) verwendet. „Der Übergang von einem Schluss im Sinne des Toulmin-Schemas zu einem mathematischen Satz kann also so verstanden werden, dass die Ausnahmeregeln und modalen Operatoren nach und nach beseitigt werden. Das ist ein Prozess der Reduktion von Unsicherheit. Der vollendete mathematische Beweis kann als ein Grenzfall eines Toulminschen Schlusses, der modale Qualifikationen und Ausnahmeregeln enthält, betrachtet werden, bei dem es gelungen ist, diese einschränkenden Bedingungen und damit die ihnen anhaftende Unsicherheit zu eliminie-ren.“ (Jahnke & Ufer, 2015, S. 340). Einen guten Überblick über didaktische Ansätze, entsprechende Kompetenzen zu entwickeln, und Schwierigkeiten, die dabei auftreten, findet man in dem zitierten Artikel.

Die didaktische Problematik des mathematisch strengen Argumentierens in der Schule umriss Frege 1914 so: „In der Schule ist es nötig, von der vollen wissenschaftlichen Strenge abzulassen, weil die Schüler nicht die geistige Reife haben, um auch nur das Bedürfnis danach zu fühlen. Es wird wahrscheinlich unmöglich sein, die irrationalen Verhältnisse in Quarta oder

Tertia so zu behandeln, wie Euklid es tut, ja vielleicht ist es kaum in Sekunda möglich. Wahrscheinlich wird diese Sache meist sehr oberflächlich behandelt. Aus didaktischen Gründen werden alle Spitzen abgebrochen, alle scharfen logischen Kanten und Ecken abgerundet. Und das ist zunächst auch wohl notwendig; aber es sollte nicht dabei bleiben. Die Strenge der Beweisführung sollte nachgeholt werden, indem das Bedürfnis dafür geweckt und dann befriedigt würde." (Frege, 2001, S. 121).

Literatur

Aristoteles (2019). *Philosophische Schriften.* Band 1. Hamburg: Felix Meiner. Lizenzausgabe für die Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Artmann, B. (1999). *Euclid – The Creation of Mathematics*. New York: Springer.

Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Prestel, A. & Remmert, R. (1983). *Zahlen.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Frege, G. (1964). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. 2. Aufl., herausgegeben von I. Angelelli. Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung.

Frege, G. (2001). Logik und Mathematik. In G. Frege. *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie*. Aus dem Nachlass herausgegeben von G. Gabriel (S. 92-165). Hamburg: Felix Meiner.

Hefendehl-Hebeker, L. (2019). Auf rationale Weise zur Irrationalität. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht: Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 33-45). Wiesbaden: Springer Spektrum. – DOI: 10.1007/978-3-658-24292-3_3.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-356). Berlin, Heidelberg: Springer.

Mittelstraß, J. (1995) (Hrsg.). *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie 1.* Stuttgart/Weimar: Verlag J. B. Metzler.

Mittelstraß, J. (2014). *Die griechische Denkform. Von der Entstehung der Philosophie aus dem Geiste der Geometrie.* Berlin/Boston: De Gruyter.

Nestle, W. (1975). *Vom Mythos zum Logos. Die Selbstentfaltung griechischen Denkens.* Stuttgart: Kröner.

Scholz, H. (1967). *Abriss der Geschichte der Logik*. 3. Auflage. Freiburg: Herder.

Toulmin, S. E. (1958). *The Uses of Argument.* Cambridge: University Press.

Walsch, W. (1975). *Zum Beweisen im Mathematikunterricht*. Berlin: Volk und Wissen.