Max HOFFMANN, Paderborn

Schnittstellenaktivitäten zum Kongruenzsatz WSW

Die Studierenden des gymnasialen Mathematik-Lehramts an der Universität Paderborn besuchen im 6. Fachsemester die Veranstaltung „Geometrie für Lehramtsstudierende“. In diesem Artikel stelle ich eine eingesetzte Schnittstellenaufgabe zum Thema Kongruenz vor und zeige anhand zweier Fallbetrachtungen auf, welche Probleme bei Lehramtsstudierenden in diesem Kontext auftreten können.

Einordnung und Beschreibung der Studie

Schnittstellenaufgaben werden in der Veranstaltung unregelmäßig im Rahmen der wöchentlichen Übungszettel bereitgestellt und sollen die Studierenden unter anderem dabei unterstützen, zu reflektieren, wie sie fachmathematische Inhalte als Hintergrund für professionelles Lehrerhandeln nutzen können. Im Gegensatz zu den normalen fachinhaltlichen Hausaufgaben bleiben sie unbepunktet. Mathematikdidaktisch befinden wir uns damit im Kontext von Hintergrundtheorien (Vollrath, 1979). Somit zielen solche Lernaktivitäten insbesondere auch darauf ab, wider die zweite Diskontinuität (Klein, 1908) zu wirken. Um die Anbindung der Fachmathematik an die Berufspraxis umzusetzen, nutzen wir die Auflistung typischer mathematikhaltiger Berufsanforderungen von Mathematiklehrern von Prediger (2013, S. 156). Aus den dort aufgezählten Punkten ergeben sich typische fiktive Situationen zur Rahmung der Schnittstellenaktivitäten. Die Aufgabe, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird, beschäftigt sich mit *Kongruenz*. Dieses Thema spielt im Geometrieunterricht vor allem auf zwei Arten eine Rolle: Zum einen bildet Kongruenz einen wichtigen Hintergrund zu Konstruktionsproblemen, da er genutzt wird, um zu definieren, in welchem Sinne eine Zielkonfiguration „eindeutig“ aus einer Ausgangskonfiguration konstruiert werden kann. Zum anderen stellen Kongruenzsätze ein zentrales Mittel zum geometrischen Schließen in der Schulgeometrie dar (Weigand et al., 2018, S. 43ff.). In der Geometrie-Vorlesung wurden die Kongruenzsätze rigoros hergeleitet. In der Aufgabe, die im übernächsten Abschnitt vorgestellt wird, sollen die Studierenden nun genau über die Voraussetzungen des Kongruenzsatzes WSW nachdenken und mit diesem schlussfolgern. Der Praxiseinsatz der Schnittstellenaufgaben wurde mit unterschiedlichen Methoden erforscht. Hierzu gehören unter anderem die Analyse der entstandenen Studierendenbearbeitungen. Diese wird auch die Datengrundlage für die in diesem Artikel vorgestellten Fallbetrachtungen darstellen.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Vorstellung der Schnittstellenaufgabe „Zwei Winkel und eine Seite“

Folgende Aufgabenstellung steht im Zentrum der weiteren Überlegungen:

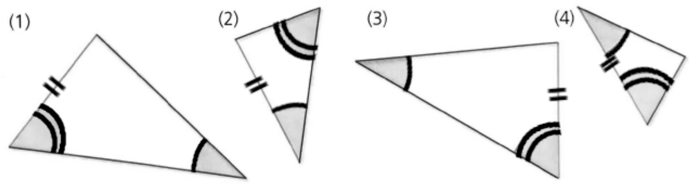
Stellen Sie sich vor, Ihre Schülerinnen und Schüler bearbeiten im Unterricht die folgende Aufgabe aus dem Schulbuch *Neue Wege 7 (NRW, G8, S. 193).*

9 Winkelgrößen ohne Messen

Die Dreiecke haben alle eine Seite der Länge 2,5 cm und Winkel von 35° und 60°.

a) Welche Dreiecke sind kongruent zueinander? Begründe.

b) Konstruiere die Dreiecke in deinem Heft. Bei welchen Dreiecken musst du hierfür eine zusätzliche Größe bestimmen?



Ihre Schülerin Emma ist verwirrt und fragt: „Wie passt das denn dazu, dass nach den Kongruenzsätzen zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen?“

a) Klären Sie Emmas Frage aus fachlicher Sicht.

b) Formulieren Sie eine mögliche Antwort.

Abb.: Aufgabenstellung. Im Original ist die zweigestrichene Seite grün, der eingestrichene Winkel blau und der zweigestrichene Winkel rot dargestellt.

Eine mögliche korrekte und umfassende fachinhaltliche Perspektive auf die Schulbuchaufgabe und Emmas Frage ist folgende: Die Aufgabe zielt auf die Benutzung des Kongruenzsatzes WSW ab. Dieser benötigt als Voraussetzung zwei Dreiecke, die in zwei Winkelgrößen und der jeweils eingeschlossenen Seitenlänge übereinstimmen. In der im Schulbuch dargestellten Situation ist diese Konfiguration nur für Dreieck (4) gegeben, aber der Innenwinkelsummensatz liefert die Größe des nicht gegebenen Winkels und damit können in jedem Dreieck die Größen der Winkel angegeben werden, die an der gegebenen Seitenlänge anliegen. WSW liefert nun die Kongruenz von (1) und (3). Die Nichtkongruenz aller anderen Paarungen folgt nicht direkt aus WSW. Man muss zusätzlich begründen, dass die Dreiecke nicht gleichschenklig sind. Emmas Frage beruht nun vermutlich auf der Fehlannahme, dass zwei Dreiecke, die in zwei Winkeln und einer Seitenlänge übereinstimmen, schon kongruent sind. Sie vergisst, dass die gegebene Seitenlänge immer zwischen den beiden betrachteten Winkeln liegen muss. Ansonsten sind die Dreiecke im Allgemeinen nur ähnlich, aber nicht kongruent. Eine Ausnahme liegt genau dann vor, wenn die Dreiecke gleichseitig sind.

Im Sinne der professionellen Handlungsanforderungen von Prediger (2013, S. 156) sind bei dieser Aufgabe zur Professionsorientierung vor allem die

Aspekte: „Zugänge (in Schulbüchern […]) analysieren und bewerten“ und „Äußerungen/Fehler von Lernenden analysieren, […] und darauf lernförderlich reagieren“ einschlägig. Wir betrachten nun zwei Ausschnitte von Bearbeitungen dieser Aufgabe.

Fall 1: Melanie

Die Studentin Melanie antwortet Emma wie folgt:

> „Um zu gewährleisten, dass zwei Dreiecke, die in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen, kongruent sind, muss ein Dreieck eindeutig aus diesen Größen konstruierbar sein. Bei den Dreiecken (1) und (3) sind der „rote“ und der „blaue“ Winkel sowie die Seite gleich, die von diesen Winkeln eingeschlossen wird. Konstruiert man aus diesen Größen ein Dreieck, ist es eindeutig. Die Dreiecke (1) und (3) sind also kongruent. Bei den Dreiecken (1) und (2) stimmen der „rote“ und der „blaue“ Winkel und eine Seite überein, die nicht von diesen Winkeln eingeschlossen wird. Aus diesen Größen lässt sich kein eindeutiges Dreieck konstruieren. Wie man anhand der Darstellungen sieht, sind diese Dreiecke nicht kongruent. Damit zwei Dreiecke kongruent sind, müssen sie also in zwei Winkeln und der Seite übereinstimmen, die von diesen beiden Winkeln eingeschlossen wird.“

Dieser Fall steht prototypisch für Studierende, die Fehlvorstellungen zum Begriff der *eindeutigen Konstruierbarkeit* haben. Melanie nutzt dieses Konzept, um Kongruenz zu begründen. Der Zugang erweist sich allerdings als Zirkelschluss, da eindeutig konstruierbar gerade genau bedeutet, dass alle Zielkonfigurationen kongruent zueinander sind. Sie stellt sich offenbar nicht die Frage, *wie* sie die eindeutige Konstruierbarkeit nachweisen kann. Diese Überlegung hätte den Zirkelschluss aufgedeckt.

Fall 2: Gregor

Als Bestandteil der fachlichen Klärung formuliert Gregor:

> „Den Kongruenzsatz, bei dem für die Kongruenz zweier Dreiecke zwei Winkel und eine Seite gleich sein müssen, kann man nur anwenden, wenn die beiden bekannten Winkel die bekannte Seite einschließen. Dies ist hier nicht bei allen Dreiecken der Fall, weswegen nicht alle Dreiecke kongruent sein können.“

Dieser Fall steht prototypisch für Studierende, die aus einer für den Kongruenzsatz WSW unpassenden Konfiguration der vorhandenen Größen fälschlicherweise auf Nichtkongruenz schließen. Dies ist in mehr als 1/3 der Lösungen mehr oder weniger schwerwiegend der Fall. Gregor berücksichtig hier nicht, dass, im Falle eines gleichschenkligen Dreiecks, sein Schluss unzutreffend ist.

Folgerung für das Redesign und lokale Theoriebildung

Die beschriebenen Fälle zeigen, dass Studierende des gymnasialen Lehramts keineswegs sicher im Kontext einfacher geometrischer Schlüsse mit Kongruenzsätzen agieren. Diese Probleme führen zu aus fachlicher Sicht unpassenden Reaktionen auf die fiktive Schülerfrage. Offenbar hat hier auch die fachinhaltliche Behandlung der Kongruenzsätze in der Vorlesung keine Wirkung gezeigt. Im Redesign dieser Aufgaben haben wir folgende Punkte geändert:

- Die Aufgabe wird zunächst vor der Behandlung der Kongruenzsätze in der Veranstaltung und zusätzlich danach gestellt. Beim zweiten Durchgang sollen die Studierenden reflektieren, welche Veränderungen sich in ihrer Aufgabenbearbeitung ergeben hat.
- Die Studierenden müssen die Schulbuchaufgabe zunächst explizit selbst lösen. Wir hoffen dadurch besser erkennen zu können, wie die Nichtkongruenz begründet wird und welche Probleme dabei auftauchen.
- In der Vorlesung wird das Konzept der *eindeutigen Konstruierbarkeit* vertieft behandelt und abgegrenzt von der bloßen Existenz einer Konstruktion für ein gegebenes Werkzeug, durch die die Eindeutigkeit nicht nachweisbar ist. Es soll deutlich werden, dass gerade genau die Kongruenzsätze die Eindeutigkeit liefern.

Grundsätzlich zeigt sich bereits in den beiden beschriebenen Fällen die Notwendigkeit, Lehramtsstudierende darin zu schulen, die Logik hinter mathematischen Zusammenhängen präzise erkennen und nutzen zu können, da diese Fähigkeit einen fachlichen Hintergrund für professionelles Handeln darstellt.

Literatur

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leipzig: Teubner.

Prediger, S. (2013). Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrgs.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 151–168). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Vollrath, H. J. (1979). Die Bedeutung von Hintergrundtheorien für die Bewertung von Unterrichtssequenzen. *Der Mathematikunterricht,* 25(5), 77–89.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J. … & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.