Martin Erik HORN, Berlin

Äquivalenzumformungen in der Geometrie am Beispiel der Satzgruppe des Pythagoras

Entgegen dem meist progressiven Selbstbild vieler Mathematikerinnen und Mathematiker handelt es sich bei der Mathematik auf lange Sicht um eine äußerst konservative, das Alte suchende und bewahrende, Neues zurückweisende, strikt rückwärtsgewandte und zutiefst erstarrte Wissenschaft. Es hat den Anschein, dass die Geschichte der Mathematik die allermeiste Zeit von Stagnation geprägt ist.

So steht am Anfang der Babylonischen Mathematik ein revolutionärer Aufbruch zu Zeiten Hammurabis. Die dort gestaltete Mathematik wurde Derbyshire (2006) und Conway zufolge über die folgenden Jahrtausende ohne signifikante inhaltliche Weiterentwicklung an nachfolgende Generationen weitergegeben. Das gleiche gilt für Ägypten: „Wir haben keinen Grund annehmen zu können, dass die ägyptische Mathematik zwischen dem 16. Jahrhundert und dem 4. Jahrhundert vor unserer Zeit irgendeinen erwähnenswerten Fortschritt gemacht hat“ (Derbyshire, 2006, S. 32).

In ähnlicher Weise konservativ einschränkend gehen wir mit den revolutionären Einsichten der Gruppe um Diophantus um, dem „Vater der Algebra“ (Derbyshire, 2006, Kap. 2), die um die Zeitenwende Variablenschreibweise, sowie Term- und Äquivalenzumformungen hervorbrachten. Seit nunmehr zweitausend Jahren stehen Äquivalenzumformungen fest im mathematischen Zentrum der Algebra. Ohne Äquivalenzumformungen können wir uns algebraische Darstellungen nicht mehr vorstellen.

Gleichzeitig weigern wir uns, diese herausragende Stellung von Äquivalenzumformungen auch in der Geometrie zu durchdenken. Es ist geradezu verstörend, wie fixiert wir einfachste Umformungen geometrischer Sachverhalte ablehnend zurückweisen. So sollte die Vektorsumme $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, die geometrisch den Zusammenhang zwischen drei Seiten $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ eines beliebigen Dreiecks (Abb. 1) beschreibt, selbstverständlich durch Quadratur in die Darstellung $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\,\mathbf{a} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$ überführt werden können. Wenn $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ gilt, dann hat auch $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$

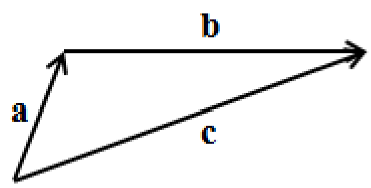

Abb. 1:
Seitenvektoren eines Dreiecks mit beliebigen Winkeln.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

zu gelten, immer und uneingeschränkt. Leistet ein mathematisches System dies nicht, so ist es nutzlos und zwingend zu verwerfen (Horn 2019).

Werden nun die beiden Katheten **a** und **b**, deren Summe der Hypotenuse **c** eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Abb. 2) entspricht, quadriert, so erhalten wir genau dann den Satz des Pythagoras $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$, wenn die beiden senkrecht zueinander stehenden Katheten $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$ anti-kommutativ vertauschen – eine algebraische Beziehung, die für senkrecht zueinander stehende Vektoren seit Grassmann (1844) bekannt ist, und die immer wieder von Mathematikerinnen und Mathematikern beim Versuch, Altes und Überholtes zu bewahren, übergangen wird.

Seit nun 175 Jahren wehren sich die traditionelle Schul- und Hochschulmathematik mit Händen und Füßen (und die Mathematikdidaktik mit noch allerhand mehr), die Vektorrechnung auf eine konsistente, Grassmann berücksichtigende Grundlage zu stellen. Rota (1997, S. 232/233) kommentiert diese geradezu groteske Rückständigkeit mit den Worten: „Die Vernachlässigung der äußeren Algebra ist die mathematische Tragödie dieses Jahrhunderts. (…) In der Zwischenzeit müssen wir uns mit Mathematikern herumschlagen, die bezüglich der äußeren Algebra blind sind.“

Höhensatz, Kathetensätze und Flächensatz

Während senkrecht zueinander stehende Vektoren anti-kommutativ vertauschen, sind parallel liegende Vektoren bezüglich der Multiplikation kommutativ. Für die Hypotenusen-Teilvektoren **p** und **q**, die parallel zueinander und parallel zu **c** liegen (siehe Abb. 2), gilt deshalb $\mathbf{pq} = \mathbf{qp}$.

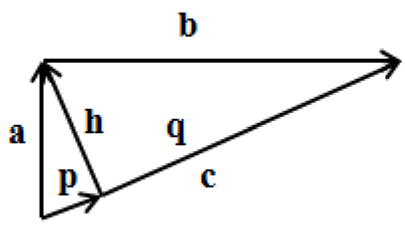

Abb. 2:
Vektoren und Teilvektoren im rechtwinkligen Dreieck.

Zusammen mit den Pythagoreischen Beziehungen für die kleineren Teildreiecke $(\mathbf{p} + \mathbf{h})^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{h}^2 = \mathbf{a}^2$ und $(\mathbf{q} - \mathbf{h})^2 = \mathbf{q}^2 + \mathbf{h}^2 = \mathbf{b}^2$ kann der Höhensatz in der üblichen Form durch Quadratur der aus **p** und **q** zusammengesetzten Hypotenuse $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2$ aufgefunden werden:

$$\mathbf{c}^2 = \mathbf{p}^2 + \mathbf{pq} + \mathbf{qp} + \mathbf{q}^2 = \mathbf{a}^2 - \mathbf{h}^2 + 2\,\mathbf{pq} + \mathbf{b}^2 - \mathbf{h}^2 = \mathbf{c}^2 - 2\,\mathbf{h}^2 + 2\,\mathbf{pq}$$

Nach Streichung von $\mathbf{c}^2$ ergibt sich die erwartete Beziehung $\mathbf{h}^2 = \mathbf{pq}$. Da die Kathetensätze letztendlich nur geringfügig modifizierte Höhensätze darstellen, können diese anschließend durch Addition von $\mathbf{p}^2$ bzw. $\mathbf{q}^2$

durch $\mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{p}^2 = \mathbf{pq} + \mathbf{p}^2 = \mathbf{p}\,(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \mathbf{pc}$

sowie $\mathbf{b}^2 = \mathbf{h}^2 + \mathbf{q}^2 = \mathbf{pq} + \mathbf{q}^2 = (\mathbf{p} + \mathbf{q})\,\mathbf{q} = \mathbf{cq} = \mathbf{qc}$

aus dem Höhensatz generiert werden. Die hier betrachteten Quadrate von Vektoren bzw. Produkte parallel liegender Vektoren bilden Skalare. Diese unterscheiden sich konzeptionell grundlegend von Produkten senkrecht stehender Vektoren, die flächenartige Größen ergeben. Die Satzgruppe des Pythagoras sollte deshalb um die als Flächensatz zu deutende Beziehung **ab** = **hc** ergänzt werden, die durch einen Flächenvergleich motiviert ist.

Weitere Äquivalenzumformungen

Anders als in konventionell geprägten Ansätzen, in denen immer nur Streckenlängen und damit Skalare a, b, c, p, q, h diskutiert und durch mathematische Beziehungen zueinander in Relation gesetzt werden, wird hier mit vektoriellen Größen und damit mit orientierten Linienelementen **a**, **b**, **c**, **p**, **q**, **h** (deutlich fett gedruckt) gerechnet.

Alle diese Gleichungen lassen sich durch Äquivalenzumformungen umgestalten, wobei selbstverständlich auch durch Vektoren dividiert werden kann (Hestenes, 2003, Gl. 23). Dazu ist lediglich notwendig, inverse Vektoren wie beispielsweise $\mathbf{c}^{-1} = \mathbf{c}/\mathbf{c}^2$ seitenkorrekt anzumultiplizieren. Die Kathetensätze oder der Flächensatz können auf diese Art und Weise durch

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}^2\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}^2\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} \qquad \mathbf{q} = \mathbf{b}^2\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{b}^2\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2} \qquad \mathbf{h} = \mathbf{ab}\,\mathbf{c}^{-1} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}}{\mathbf{c}^2}$$

entsprechend umgeformt und nach gesuchten vektoriellen Größen aufgelöst werden. Die im Kurzvortrag auf der Tagung vorgestellten rechnerischen Beispiele werden in die erweiterte englischsprachige Fassung des Beitrags (Horn, 2020), für die mehr Platz zur Verfügung steht, mit aufgenommen.

Die Verallgemeinerte Satzgruppe des Pythagoras

Bei beliebigen Dreiecken, deren Seiten keine rechten Winkel einschließen, können die durch Quadratur ermittelten Beziehungen mit Hilfe des inneren

<table>
<tr><th colspan="2">Rechtwinklige Dreiecke</th><th colspan="2">Dreiecke beliebiger Winkel</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$</td><td colspan="2">$\mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\,\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2$</td><td>$\mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2$</td><td>$\mathbf{p}\,\mathbf{c} = \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$</td><td>$\mathbf{q}\,\mathbf{c} = \mathbf{b}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2$</td><td>$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c}$</td><td>$\mathbf{p}\,\mathbf{q} = \mathbf{h}^2 + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$</td><td>$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{h}\,\mathbf{c} + \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$</td></tr>
</table>

Tab.: Übersicht über die Verallgemeinerung der Satzgruppe des Pythagoras

Produkts und damit unter Bezug auf den Kosinus des eingeschlossenen Winkels $2\mathbf{a}\bullet\mathbf{b} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba} = 2ab\cos\gamma$ ausgedrückt werden. Auch dies ist wieder eine logische Folge konsequenter Äquivalenzumformung geometrisch motivierter Größen, die auf die aufgelisteten verallgemeinerten Pythagoreischen Formeln (siehe Tabelle) führt.

Ausblick: Die komplexe Konjugation bewirkt einen Symmetriebetrug

Es ist nicht verboten, nun auch Potenzen höherer Ordnung der Hypotenuse $\mathbf{c} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ eines rechtwinkligen Dreiecks zu betrachten. Koeffizienten der Terme kommutativer Größen wie $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ bilden dann ein Pascal-Dreieck. Koeffizienten von Termen anti-kommutativer Größen wie $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ (siehe Abb. 3) bilden das Pauli-Pascal-Dreieck (Horn 2007). Wir alle bege-

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^0 &= 1\\
\mathbf{c} &= 1\,\mathbf{a} + 1\,\mathbf{b}\\
\mathbf{c}^2 &= 1\,\mathbf{a}^2 + 0\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} + 1\,\mathbf{b}^2\\
\mathbf{c}^3 &= 1\,\mathbf{a}^3 + 1\,\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 1\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}^2 + 1\,\mathbf{b}^3\\
\mathbf{c}^4 &= 1\,\mathbf{a}^4 + 0\,\mathbf{a}^3\mathbf{b} + 2\,\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 + 0\,\mathbf{a}\,\mathbf{b}^3 + 1\,\mathbf{b}^4
\end{aligned}
\qquad
\boxed{\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 0 & & 1 & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
1 & & 0 & & 2 & & 0 & & 1
\end{array}}
$$

Abb. 3: Koeffizienten des Pauli-Pascal-Dreiecks belegen die Anti-Kommutativität

hen also einen Symmetriebetrug, wenn wir die komplexe Konjugation nutzen. Die Multiplikation komplexer Zahlen ist kommutativ, denn Potenzen höherer Ordnung zeigen die Koeffizienten des Pascal-Dreiecks. Multiplizieren wir allerdings auch komplex konjugierte Faktoren, bilden die dann berechneten Koeffizienten ein Pauli-Pascal-Dreieck (Horn, 2019). Fazit: Die komplexe Konjugation wurde erfunden, um nicht-kommutative Strukturen recht dreist mit Hilfe kommutativer Größen zu modellieren.

Literatur

Derbyshire, J. (2006). *Unknown Quantity.* Washington, DC: Joseph Henry Press.

Grassmann, H. (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin*. Leipzig: Verlag von Otto Wigand.

Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002. *Amer. J. of Physics* 71 (2), 104–121.

Horn, M. E. (2007). Die didaktische Relevanz des Pauli-Pascal-Dreiecks. In D. Höttecke (Hrsg.), *GDCP Jahrestagung Bern, Band 27* (S. 557–559). Berlin: LIT-Verlag.

Horn, M. E. (2019). Cheating with Complex Numbers. Der Selbstbetrug mit den komplexen Zahlen. http://www.vixra.org/abs/1911.0023 (01.11.2019).

Horn, M. E. (2020). Equivalence Operations in Geometry Illuatrated by the Pythagorean Theorems. In Vorbereitung für *Phydid B,* URL: www. phydid.de.

Rota, G.-C. (1997). *Indiscrete Thoughts.* Boston: Birkhäuser.