

Hans HUMENBERGER, Wien

„Empirische Wahrscheinlichkeiten“ – gut gemeint, aber auch wirklich gut?

Es gibt verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe, das ist allgemein bekannt und wohl nichts Neues. Aber leider ist ihr Verständnis (manchmal selbst bei gleichem Begriff) nicht einheitlich, z. B. beim Begriff *frequentistische Wahrscheinlichkeit*.

Man kann bei der Unterteilung der verschiedenen Wahrscheinlichkeitsbegriffe in den Vordergrund stellen, wie man Wahrscheinlichkeiten *interpretieren* kann, sozusagen was sie *bedeuten*.

In diesem Sinn bedeutet *frequentistische Wahrscheinlichkeit*, dass man damit Vorhersagen für relative Häufigkeiten machen kann (auch ohne das zugehörige Zufallsexperiment wirklich durchzuführen). Man hat also einen *theoretischen* Wert $P(A)$, sozusagen ein *geistiges Modell*, mit dem man Prognosen für die empirische Welt machen kann (für relative Häufigkeiten $h_n(A)$): $P(A) \xrightarrow{\text{vorhersagen}} h_n(A)$). Das hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn es sich um Ereignisse handelt, die in Zusammenhang mit beliebig oft wiederholbaren Zufallsexperimenten stehen.

In diesem Sinn wäre der *subjektivistische* ein anderer Wahrscheinlichkeitsbegriff. Aber *Laplace-Wahrscheinlichkeiten* und *geometrische Wahrscheinlichkeiten* nicht (denn diese können ja auch einerseits frequentistisch und andererseits subjektivistisch interpretiert werden).

Eine andere Einteilung verschiedener Wahrscheinlichkeitsbegriffe stellt nicht die verschiedenen Interpretationsmöglichkeiten in den Fokus, sondern: Wie kann man zugehörige Werte *erhalten*? Diese verschiedenen Versionen von Wahrscheinlichkeitsbegriffen sind in Schulbüchern und Lehrplänen zumindest implizit verankert.

In diesem Sinn bedeutet *frequentistische Wahrscheinlichkeit*: Man kann solche (Näherungs-)Werte erhalten, indem man eine lange Versuchsserie durchführt, und die zugehörige relative Häufigkeit dann als Schätzwert nimmt: $h_n(A) \xrightarrow{\text{schätzen für große } n} P(A)$

So gesehen wäre neben dem *frequentistischen* und dem *subjektivistischen* Wahrscheinlichkeitsbegriff auch *Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil* (Laplace-Wahrscheinlichkeit, geometrische Wahrscheinlichkeit; eventuell sogar getrennt?) ein eigener Wahrscheinlichkeitsbegriff (sozusagen eine Methode, wie man auf solche Werte kommen, d. h. sie erhalten kann).

Dagegen ist auch gar nichts einzuwenden, denn für Lernende stellt sich in erster Linie die Frage nach „wie kann ich zugehörige Werte *erhalten*?“. Die Frage nach „wie kann ich Werte *interpretieren*?“, ist vielleicht bei der Erstbegegnung mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff etwas weniger wichtig, aber unbehandelt sollte sie im Schulunterricht auch nicht bleiben.

Mir geht es hier vor allem um Formulierungen, die in diesem Zusammenhang (gut gemeint) manchmal gebraucht werden, und diese sind m. E. zumindest problematisch, ich würde sogar weitergehen und sagen: sie sind nicht gut und sollten (zumindest im Schulunterricht) vermieden werden!

Unmittelbarer Anlass für meine Beschäftigung mit diesem Thema war ein Vortrag, in dem der Begriff *empirische Wahrscheinlichkeit* als Alternative zu *frequentistische Wahrscheinlichkeit* so nebenbei erwähnt wurde. Das war für mich damals ganz neu, das hatte ich vorher noch nie bewusst gehört bzw. gelesen, und das hat mich auch nach dem Vortrag weiter beschäftigt (siehe auch Humenberger, 2019).

Ich halte diese Wortwahl (*empirische Wahrscheinlichkeit, empirischer Wahrscheinlichkeitsbegriff*) jedoch für ungeeignet und wenig hilfreich, weil sie genau den Unterschied verwischt, den ich oben versucht habe herauszustreichen (Wahrscheinlichkeiten sind theoretische Werte bzw. geistige Modellwerte, relative Häufigkeiten sind empirische Werte). Und ich halte diesen Unterschied besonders im Lernprozess für wichtig, denn man kann ja im Schulunterricht nicht gut mit den Kolmogoroff-Axiomen arbeiten, um formal Wahrscheinlichkeiten zu definieren, das ist zu abstrakt für Lernende. Man kann im Lernprozess – zur Etablierung geeigneter Grundvorstellungen – plakative Gegenüberstellungen wie „relative Häufigkeiten sind empirische Werte“ und „Wahrscheinlichkeiten sind theoretische Werte, sie haben Modellcharakter“ sinnvoll einsetzen, um den Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten adäquat zu beschreiben. Es sollte im Unterricht gelingen, im Rahmen des (frequentistischen) Wahrscheinlichkeitsbegriffs Folgendes herauszuarbeiten (beide oben erwähnten Richtungen: vorhersagen, schätzen; vgl. auch Borovcnik, 1992):

- Wahrscheinlichkeiten sind **Prognosen** für zu erwartende relative Häufigkeiten.
- Wahrscheinlichkeiten können durch relative Häufigkeiten (großes n) **geschätzt** werden.

Man kann im Schulunterricht meist gar nicht genau definieren, was Wahrscheinlichkeiten eigentlich sind, trotzdem müssen es Lehrende schaffen, bei

den Lernenden Grundvorstellungen zu etablieren, was man sich unter Wahrscheinlichkeiten vorstellen kann, was sie leisten, wie man sie erhalten und wie man mit ihnen rechnen kann, ein bekanntlich schwieriges Unterfangen.

Die eben formulierten zwei Richtungen des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes sollten keine Überforderung für Lernende darstellen. Der oben erwähnte Begriff *empirische Wahrscheinlichkeit* sollte wohl genau die eine Richtung des frequentistischen Begriffes hervorheben bzw. betonen („gut gemeint“): Man kann Wahrscheinlichkeitswerte auch aus der Empirie erhalten bzw. gewinnen. So heißt es z. B. bei Körner u. a. (Hrsg., 2014, S. 56) „Statt Schätzwert sagt man auch empirische Wahrscheinlichkeit“, es wird also genau erklärt, wie man das meint, und dieser Begriff wird dann auch nicht weiter ausgebreitet. Man könnte, ich meine sogar sollte, es besser einfach dabei belassen, sinngemäß zu sagen: Relative Häufigkeiten sind eine Möglichkeit, auf empirischem Wege Wahrscheinlichkeiten zu schätzen. Das meine ich deswegen, weil man auf diesem Wege erstens immer nur Schätzwerte erhalten kann, und zweitens, weil Wahrscheinlichkeiten eben keine empirischen Werte sind, sondern theoretische („geistige Modellwerte“), auch wenn sie – geschätzt – auf empirische Weise gewonnen werden. Das mag man als spitzfindig bezeichnen, aber hier (bei der wichtigen Unterscheidung zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten) macht das eben einen entscheidenden Unterschied: Wie sollen die Lernenden den Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten dann noch benennen?

Ein Analogon: Wenn man empirische Werte benutzt, um z. B. eine Regressionsfunktion aufzustellen, die ihrerseits natürlich auch nur Modellcharakter hat, wird man auch kaum sagen, dass die erhaltene Regressionsfunktion rein empirischen Charakter hat.

Wenn man das erklärungsbedürftige Fremdwort *frequentistisch* vermeiden will, kann man sich dafür sicher was Geeignetes überlegen (z. B. gar kein Adjektiv zu verwenden bei Wahrscheinlichkeiten), aber im Wort empirisch sehe ich da keine Lösung, im Gegenteil, ich sehe darin eher eine Belastung für angemessene und tragfähige Vorstellungen.

In einer analogen Beziehung stehen auch noch andere Begriffspaare, auch hier kann man sagen, dass es sich jeweils um einen *empirischen* und um einen *theoretischen* Wert handelt:

- Mittelwert \bar{x} einer Datenliste $\overset{\text{vorhersagen}}{\Leftrightarrow}$ Erwartungswert μ der zugehörigen Verteilung $\underset{\text{schätzen}}{\quad}$

- (empirische) Varianz s^2 einer Datenliste $\overset{\text{vorhersagen}}{\Leftrightarrow}$ Varianz σ^2 der
zugehörigen Verteilung $\underset{\text{schätzen}}{\Leftrightarrow}$

Hier kommt noch das Problem mit dem Nenner $n - 1$ statt n bei s^2 dazu, aber das ist ein anderes Thema. Ein Spezifikum dieses Begriffspaares ist: Für beide wird derselbe Name verwendet (Varianz; anders als bei den anderen beiden Begriffspaaren relative Häufigkeit – Wahrscheinlichkeit, Mittelwert – Erwartungswert), aber immerhin verschiedene Buchstaben (s^2, σ^2), und bei der Varianz einer Datenliste wird oft dazugesagt *empirisch*, also *empirische Varianz* (weil sie sich eben auf empirische Daten bezieht). Das darf aber keinesfalls dazu dienen, den Begriff empirische Wahrscheinlichkeit im obigen Sinn zu rechtfertigen, denn das Pendant zur *empirischen Varianz* übertragen auf den *Wahrscheinlichkeitsbegriff* wäre ja mit *empirischer Wahrscheinlichkeit* wirklich die *relative Häufigkeit* zu meinen, und das kann ja wohl nicht sein.

In manchen der mit Google gefundenen Stellen, in denen von *empirischer Wahrscheinlichkeit* gesprochen bzw. geschrieben wird (manchmal liest man auch *statistische* oder *experimentelle* Wahrscheinlichkeit), liest man dann auch (passend) von *theoretischen* Wahrscheinlichkeiten (gemeint: mit Laplace-Annahmen – Symmetrie – bestimmt). Es ist klar, wie das gemeint ist („gut“ – als Lernhilfe), aber ist es auch wirklich gut im Sinne einer tragfähigen Begriffsbildung? Wohl kaum. Was sollen Lernende, die von diesen Begriffen geprägt wurden, antworten auf die Frage: Was ist der Unterschied zwischen relativen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten?

Eine deutlich weiterreichende Analyse auch noch anderer Wahrscheinlichkeitsbegriffe findet sich in Krüger/Sill/Sikora 2015, S. 233ff. Die zugehörige Quintessenz lautet kurzgefasst: In der Schule kann ganz auf weitere Adjektive bei „Wahrscheinlichkeit“ verzichtet werden.

Literatur

- Borovcnik, M. (1992). *Stochastik im Wechselspiel zwischen Intuitionen und Mathematik*. BI, Mannheim.
- Humenberger, H. (2019). Der „empirische Wahrscheinlichkeitsbegriff“ – gut gemeint, aber auch wirklich gut? *Stochastik in der Schule* 39, 3, 17–19.
- Körner, H., Lergenmüller, A., Schmidt, G. & Zacharias, M. (Hrsg. 2014). *Mathematik, Neue Wege 7, Arbeitsbuch für Gymnasien (Niedersachsen)*. Schroedel, Braunschweig.
- Krüger, K., Sill, H.-D. & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer, Berlin-Heidelberg.