

Janina KRAWITZ, Münster & Stanislaw SCHUKAJLOW, Münster

Negative Effekte des Zeichnens auf das Problemlösen: Eine Frage der Qualität?

Eine Skizze zu zeichnen gilt als hilfreiche Strategie für das mathematische Problemlösen. Allerdings wurde ein negativer Effekt des Skizzenzeichnens auf die Leistung beim Lösen nichtlinearer Geometrieaufgaben gefunden. Der Beitrag berichtet von einer experimentellen Studie, die zum Ziel hat, diesen überraschenden, negativen Effekt zu replizieren und zu erklären. Als mögliche Ursachen werden lineare Übergeneralisierungen der Neunt- bis Elftklässler und die Qualität der Strategienutzung analysiert.

Skizzenzeichnen als Strategie beim Lösen nichtlinearer Aufgaben

Beim Zeichnen einer Skizze erstellen Lernende eine visuelle Repräsentation des mathematischen Problems. In diesem Prozess externalisieren sie ihre mentalen Vorstellungen des Problems. Die gegebenen Informationen werden dabei umstrukturiert und selektiert, so dass die zentralen Elemente des Problems und deren Beziehungen in der Skizze abgebildet werden und die weitere Verarbeitung der Informationen vereinfacht wird.

Empirisch bestätigen einige Studien die positive Wirkung, die das Skizzenzeichnen für das Problemlösen hat (z.B. Hembree, 1992). Allerdings wurde in der Studie von De Bock, Verschaffel, Janssens, Van Dooren & Claes, (2003) überraschenderweise ein negativer Effekt des Skizzenzeichnens auf das Lösen nichtlinearer Geometrieaufgaben gefunden. Dieses stellte sich dort sogar als hinderlich für die Leistung beim Problemlösen heraus.

Ein entscheidender Faktor dafür, ob das Skizzenzeichnen hilfreich oder hinderlich ist, ist die Qualität, mit der das Skizzenzeichnen angewandt wird (Cox, 1999). Dabei bezieht sich die Qualität auf zwei verschiedene Eigenschaften der selbsterstellten Skizzen, die Korrektheit und die Vollständigkeit. Eine hohe Qualität des Skizzenzeichnens bedeutet, dass Lernende eine richtige Skizze erstellen (Korrektheit), in der die zentralen Informationen des Problems explizit dargestellt werden (Vollständigkeit). Empirisch bestätigte sich der positive Zusammenhang zwischen der Qualität des Skizzenzeichnens und der Leistung beim Lösen anspruchsvoller Mathematikaufgaben (z.B. Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2016). Demzufolge kann vermutet werden, dass in der Studie von De Bock et al. (2003) eine niedrige Qualität verantwortlich für den hinderlichen Einfluss des Skizzenzeichnens auf die Leistung beim Problemlösen war. Im Untersuchungsfokus dieser Studie standen nichtlineare Geometrieaufgaben, bei denen der Flächeninhalt und

das Volumen ähnlicher Figuren und Körper mithilfe eines gegebenen Skalierungsfaktors ermittelt werden mussten. Zum Beispiel: „Die Seitenlänge des Quadrats C ist 12-mal größer als die Seitenlänge des Quadrats D. Wenn der Flächeninhalt des Quadrats C 1440 cm^2 ist, wie groß ist dann der Flächeninhalt des Quadrats D?“ (De Bock et al., 2003).

Lernenden fällt dieser Aufgabentyp bekanntermaßen sehr schwer, da sie dazu neigen, auch bei nichtlinearen Problemen lineare Argumentationen anzuwenden (lineare Übergeneralisierungen, Van Dooren, De Bock, Janssens & Verschaffel, 2008). Die Strategie des Skizzenzeichnens kann helfen, den nichtlinearen Zusammenhang des Flächeninhalts – bzw. des Volumens – der ursprünglichen und skalierten Figur – bzw. des Körpers – zu erkennen. Die Ergebnisse von De Bock et al. (2003) lassen jedoch vermuten, dass das Zeichnen einer Skizze lineare Übergeneralisierungen der Lernenden noch verstärkt und so zu einer schlechteren Leistung geführt hat. In Skizzen von Figuren oder Körpern werden typischerweise nur die Seiten bzw. Kanten als Linien dargestellt, wohingegen der Flächeninhalt oder das Volumen nicht explizit gezeichnet wird. Eine Erklärung für den negativen Effekt des Skizzenzeichnens ist somit, dass das Zeichnen die Aufmerksamkeit der Lernenden auf den Umfang mit seinen linearen Eigenschaften gelenkt hat. Der Flächeninhalt (bzw. Volumen) und seine nichtlineare Eigenschaft werden in der Skizze nicht explizit dargestellt, was bedeutet, dass die Qualität des Skizzenzeichnens als unzureichend bezüglich des Aspekts der Vollständigkeit beurteilt werden kann. Eine höhere Qualität wird erreicht, wenn der Flächeninhalt (bzw. das Volumen) in der Skizze markiert wird, zum Beispiel durch eine zusätzliche Schraffierung.

Diese Überlegungen führen zu den folgenden Forschungsfragen:

1. Führt das Zeichnen einer Skizze zu einem Anstieg an linearen Übergeneralisierungen und einer geringeren Leistung beim Lösen von nichtlinearen Geometrieaufgaben?
2. Wird der negative Effekt des Skizzenzeichnens auf die Leistung und die Anzahl an linearen Übergeneralisierungen aufgehoben, wenn die Qualität der Strategienutzung durch das Markieren zentraler Informationen in den Zeichnungen verbessert wird?

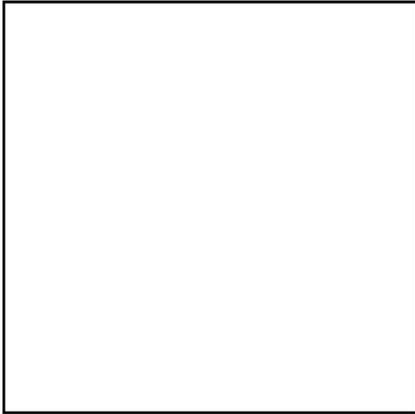
Methode

An der Untersuchung nahmen 123 Lernende der neunten bis elften Klassenstufe von vier Gymnasien und einer Gesamtschule teil (58.5% weiblich, $M = 16,19$ Jahre). Die Schülerinnen und Schüler wurden zufällig einer von drei Bedingungen zugewiesen: In der Zeichnen Gruppe (Z) erhielten die Lernenden Aufforderungen, die Figuren (bzw. Körper) aus den Aufgabentexten

zu zeichnen (siehe Abb. 1, Aufforderung a). In der Zeichnen-mit-Markieren Gruppe (ZM) wurden die Lernenden zusätzlich aufgefordert, den Flächeninhalt (bzw. das Volumen) farbig zu schraffieren (siehe Abb. 1, Aufforderung b). Lernende der Kontrollgruppe (KG) erhielten keine Aufforderungen. Die Schülerinnen und Schüler aller drei Gruppen bearbeiteten einen Problemlösetest, der aus vier nichtlinearen Geometrieaufgaben bestand (siehe obige Beispielaufgabe). Die Aufforderungen der Z und ZM Gruppen wurden im Test bei jeder der Aufgaben abgebildet.

Die Seitenlänge von einem Quadrat C ist 12-mal größer als die Seitenlänge von Quadrat D.

a) Zeichne das Quadrat D.
b) Schraffiere die Fläche des Quadrates D farbig.



Quadrat C *Quadrat D*

Abb. 1: Aufforderungen Zeichnen a) und Markieren b) eingebettet in einer Testaufgabe
Für die Leistung wurden die Lösungen des Problemlösetests dichotom als richtig oder falsch kodiert. Um die Anzahl der linearen Übergeneralisierungen zu ermitteln, wurde analysiert, ob die Lösung auf einem linearen Modell basiert (kodiert als 1) oder nicht (kodiert als 0). Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden die Mittelwerte der Leistung und der Anzahl an linearen Übergeneralisierungen mithilfe von t-Tests verglichen.

Ergebnisse und Diskussion

Ziel der ersten Forschungsfrage war, die Studie von De Bock et al. (2003) zu replizieren. In Einklang mit den früheren Befunden zeigten auch unsere Ergebnisse einen negativen Effekt des Skizzenzeichnens auf die Leistung beim Problemlösen. Lernende, die die Strategie des Skizzenzeichnens anwandten, ohne dass die Qualität des Skizzenzeichnens verbessert wurde (Z Gruppe), lösten die nichtlinearen Geometrieaufgaben schlechter als die KG.

Des Weiteren führte das Skizzenzeichnen zu einer größeren Anzahl an linearen Übergeneralisierungen. Die geringere Leistung der Z Gruppe im Vergleich zur KG lässt sich demnach durch den Anstieg an linearen Übergeneralisierungen begründen.

Im Rahmen der zweiten Forschungsfrage untersuchten wir, welchen Einfluss die Qualität der Strategienutzung auf die Leistung und die Anzahl an linearen Übergeneralisierungen beim Lösen der nichtlinearen Geometrieaufgaben hatte. Die Qualität der Strategienutzung wurde durch das Markieren zentraler Informationen – hier dem Flächeninhalt (bzw. Volumen) – erhöht. Die Ergebnisse bestätigten unsere Vermutungen nur zum Teil. Auch das Skizzenzeichnen mit einer höheren Qualität (ZM Gruppe) zog im Vergleich zur Kontrollgruppe eine geringere Leistung beim Problemlösen nach sich. Bezüglich der Anzahl an linearen Übergeneralisierungen unterschieden sich allerdings Lernende mit Skizzenzeichnen in einer hohen Qualität (ZM Gruppe) und ohne Skizzenzeichnen (KG) nicht signifikant voneinander. Anscheinend half die Verbesserung der Qualität die Anzahl von linearen Übergeneralisierungen, die durch das Skizzenzeichnen hervorgerufen wurden, zu minimieren. Allerdings half eine höhere Qualität nicht, richtige Lösungswege in Gang zu setzen und die Aufgaben letztendlich zu lösen. Insbesondere qualitative Studien erscheinen weiterführend nötig, um ein umfangreicheres Bild der Schwierigkeiten zu erhalten, die Lernende neben linearen Übergeneralisierungen durch das Skizzenzeichnen zum Lösen nichtlinearer Geometrieaufgaben haben.

Literatur

- Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9(4), 343–363.
- De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D., Van Dooren, W. & Claes, K. (2003). Do realistic contexts and graphical representations always have a beneficial impact on students' performance? Negative evidence from a study on modelling non-linear geometry problems. *Learning and Instruction*, 13(4), 441–463.
- Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem solving: A meta-analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), 242–273.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S. & Leopold, C. (2016). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics* (95), 53–78.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 311–342.