

Thomas KROHN, Leipzig & Silvia SCHÖNEBURG-LEHNERT, Leipzig

Vorstellungen zum Thema „Proportionalität“ aufbauen bzw. diagnostizieren – Implikationen für den Unterricht

Im folgenden Beitrag soll die Bedeutung einer fundierten Ausbildung von Kenntnissen über proportionale und antiproportionale Zusammenhänge und deren Eigenschaften begründet und in den Kontext der aktuellen Grundvorstellungstheorie in der mathematikdidaktischen Forschung eingebettet werden. Daraus werden Implikationen für einen grundvorstellungsbasierten Unterrichtsansatz zum Ausbilden der gewünschten bzw. zur Diagnose der bereits existierenden Schülervorstellungen gezogen.

Die Notwendigkeit der Ausbildung tragfähiger Schülervorstellungen

Die Frage der Sinnhaftigkeit ist bei der Konzipierung des eigenen Unterrichts für alle Lehrenden essenziell: Oft scheint es, als würden die Lernenden zwischen Mathematikaufgaben bzw. -verfahren und ihrem Alltag kaum enge Beziehungen sehen. Wird die Bedeutung eines Sachverhaltes nicht erfasst, so ist das Resultat häufig das reine kalkülorientierte Anwenden von Methoden und nicht selten das fehlende Reflektieren der erhaltenen Ergebnisse (vgl. u. a. Selzer & Spiegel, 2005, S. 3 oder Prediger, 2009, S. 215). Um dieser Problematik entgegen zu wirken, ist es angebracht, dass die Lernenden tragfähige Grundvorstellungen vom jeweiligen Lerninhalt ausbilden.

Diese Grundvorstellungen werden im Hinblick der späteren Implikationen für den konkreten Unterricht im Themengebiet „Proportionalität“ angelehnt an die aktuelle fachdidaktische Forschung als generalisierte mentale Modelle mathematischer Inhalte (vgl. vom Hofe, 2003, Wartha, 2010) verstanden, welche den bereichsspezifischen Übersetzungen zwischen verschiedenen Darstellungsebenen dienen, „um aus unterschiedlichen theoretischen Perspektiven ein tieferes, vielschichtigeres Verständnis empirisch beobachtbarer Phänomene zu erlangen“ (Nitsch, 2014, S. 11).

Weiterhin ist für die gezielte Entwicklung späterer Unterrichtsformate wichtig, zu unterscheiden zwischen der Perspektive der Lehrenden – im Sinne eines Soll-Zustandes (normative Ebene) zum jeweiligen Unterrichtsgegenstand – und der individuellen mentalen Repräsentation der Lernenden – im Sinne eines Ist-Zustandes (deskriptive Ebene) – deren Verbindung die wichtige konstruktive Perspektive darstellt (vgl. u. a. vom Hofe, 1995, S. 23ff./105f.). Die Betrachtung unter dem konstruktiven Aspekt kann zu verschiedenen Zeitpunkten geschehen. Zum einen im Voraus hinsichtlich eines neuen Unterrichtsinhaltes, um gezielte Fördermaßnahmen in Richtung der

normativen Grundvorstellungen anzuregen. Zum anderen am Ende einer Unterrichtseinheit oder eines Themenkomplexes, um auf eventuelle Lücken im Lernprozess einzugehen (vgl. Lengnink, u. a. 2011, S. 3ff.).

Normative Grundvorstellungen im Bereich der proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen innerhalb der Leitidee 4

„Die Themengebiete ‚Proportionale und antiproportionale Zuordnungen‘ und ‚Prozentrechnung‘ gehören zum Schwarzbrot des Mathematikunterrichts. In welches didaktische Lager man auch schaut – niemand wird die Bedeutung der genannten Gebiete und die Notwendigkeit ihrer sorgfältigen Behandlung [...] in Zweifel ziehen.“ (Jahnke, 2002, S. 4).

Zwar werden bereits in der Primarstufe die Lernenden mit proportionalen Zusammenhängen in ihrem Alltag konfrontiert, etwa bei einfachen Multiplikations- und Divisionsaufgaben, doch erst in der Sekundarstufe I – zumeist in Klassenstufe 6 – erfolgt das Herausarbeiten der konkreten Eigenschaften proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge.

Betrachtet man die Bildungsstandards im Fach Mathematik, so ist das Themengebiet unter der Leitidee L4 „Funktionaler Zusammenhang“ einzuordnen. Es bildet damit das unmittelbare Fundament für alle folgenden funktionalen Untersuchungen und so sollte beachtet werden, dass bereits (anti-)proportionale Zuordnungen Beziehungen zwischen zwei Größenbereichen beschreiben und damit die drei funktionalen Aspekte – im Sinne von Greefrath, 2016, S. 17f. (vgl. auch Vollrath, 1989; Malle 2000; vom Hofe, 2003) – angesprochen werden: 1. Zuordnungsaspekt: Welche Größe ist einer anderen eindeutig zugeordnet? 2. Kovariationsaspekt: Wie verändert sich eine Größe mit der anderen? Und 3. Objektaspekt: Wie verhält sich die Funktion (hier: Zuordnung) als Ganzes? Obige Aspekte führen dann zu den grundlegend aufzubauenden normativen Grundvorstellungen: „Zuordnungsvorstellung“, „Kovariations- oder Änderungsvorstellung“ und „Objektvorstellung“ (vgl. vom Hofe, 2003, S. 6), die im Folgenden feiner ausdifferenziert werden.

Implikationen für die konkrete Unterrichtsgestaltung

1) Nutzung verschiedener Darstellungsarten

Die Grundvorstellungen können sich in bestimmten Darstellungsarten unterschiedlich zeigen, allerdings weder zwingend voneinander trennscharf oder unabhängig. Sie lassen sich „sprachlich als Beschreibung, numerisch als Tabelle, grafisch als Diagramm oder Graph und symbolisch als Term“ (Hußmann & Laakmann, 2011, S. 4) darstellen. Ferner ist die Richtung des Darstellungswechsels von immanenter Bedeutung (vgl. ausführliche Darstellungen in Nitsch, 2014, S. 101f. sowie Hußmann & Laakmann, 2011, S. 4ff.).

der Vervielfachungs- sowie Additionsvorstellung häufig richtige Antworten gegeben wurden. Die Aktivierung der Proportionalitätsvorstellung und die Verwendung der zugehörigen Operatormethode wurden häufig in Verbindung mit der tabellarischen beziehungsweise numerischen und algebraischen Darstellungsform festgestellt und wenig auf die graphische Darstellungsform zurückgeführt. Eine Aktivierung der Quotienten- und Verhältnisvorstellung war sehr selten. c) Die Antiproportionalitätsvorstellung wurde insbesondere zum Finden weiterer Wertepaare aktiviert und demnach die Bruchgleichung als Lösungsstrategie verwendet. Dies geschah vorrangig unter Verwendung der tabellarischen und algebraischen Darstellungsform.

Die im Rahmen der GDM 2020-Tagung vorgestellten konkreten Unterrichtsmaterialien können bei den Autoren nachgefragt werden. Zudem bedanken sich die Autoren herzlich bei Herrn Philipp Kern.

Literatur

- Greefrath, G. et al. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.
- Hafner, T. (2012). *Proportionalität und Prozentrechnung in der Sekundarstufe I*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion – viele Gesichter. *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II* 53.38 (2011), 2–11.
- Jahnke, T. (2002). Proportionale und antiproportionale Zuordnungen und Prozentrechnung heute. *Mathematik lehren* 114, 4–5.
- Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. *Praxis der Mathematik in der Schule. Sekundarstufen I und II* 53.40, 2–7.
- Malle, G. (2000). Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema. *Mathematik lehren* 103, 4–7.
- Nitsch, R. (2014). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül [...]. In Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 213–234). Weinheim und Basel: Beltz, 2009.
- Selter, C. & Spiegel, H. (2005). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Ernst Klett Verlag.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. (2. Aufl.) Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal der Mathematikdidaktik* 10, 3–37.
- Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *mathematik lehren*, 118, 4–8.
- Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin und Oxford: Spektrum.
- Wartha, S. (2010). Aufbau von Grundvorstellungen. Ein Förderkonzept. In A. M. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 911–914). Münster: WTM.