Vera LANDGRAF, Bamberg

Teilbarkeit anschaulich darstellen – Potenziale für anschauliche Beweise

Im Projekt schauMal wird anschauliches Beweisen im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert. Inhaltlich wird der Bereich Teilbarkeit fokussiert. Dieser Beitrag diskutiert anschauliche Darstellungen der Division und damit der Teilbarkeit in Schulbüchern und betrachtet mögliche Potenziale für einen Einsatz bei anschaulichen Beweisen. Diese Grundlagen werden für das Design des Projekts genutzt, dessen Aufbau im Überblick dargelegt wird.

Teilbarkeit anschaulich darstellen

Ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts der Grundschule ist es, Kindern Grundrechenoperationen nahe zu bringen, damit sie in der Lage sind, diese zu verstehen und anzuwenden. Um Rechenoperationen und ihre Eigenschaften zunehmend zu verstehen, müssen Kinder im Prozess des Rechnenlernens die Möglichkeit bekommen, tragfähige Grundvorstellungen aufzubauen. Üblicherweise werden im Unterricht ausgewählte Darstellungsmittel eingesetzt, mit denen Kinder unterstützt werden sollen, „adäquate geistige Vorstellungsbilder wichtiger mathematischer Begriffe und Operationen aufzubauen“ (Söbbeke, 2007, S. 4).

Eine wesentliche Grundoperation in der Grundschule ist die Division. Diese Grundrechenoperation ermöglicht es, Teilbarkeiten von Zahlen zu erforschen. Darstellungen und didaktische Materialien sind das unterrichtliche Mittel, Vorstellungen der Kinder anzuregen und im besten Fall den Aufbau von geeigneten Operationsvorstellungen zu ermöglichen. Schulbücher geben einen guten Einblick, welche Darstellungsmittel eingesetzt werden. Für das vorliegende Projekt ist es insbesondere interessant, wie aktuelle Schulbücher üblicherweise versuchen, die Division anschaulich darzustellen. Die Einführung dieser Operation erfolgt in der Grundschule meist „*eigenständig* und *anwendungsnah* im Sinne des *Aufteilens* und *Verteilens* oder als *Umkehroperation* der Multiplikation“ (Padberg & Büchter, 2015, S. 215 Herv. i. O.).

In Schulbüchern findet sich eine große Vielzahl von Darstellungen, die die Division und die genannten Interpretationsmöglichkeiten thematisieren. Eine genauere Analyse verweist auf drei Kategorien, in die die auftretenden Darstellungen unterteilt werden können: (a) Darstellungen, die den Kindern die Interpretation der Division als Aufteilen nahelegen; (b) solche, die den Verteilaspekt darzustellen versuchen und zuletzt (c) Darstellungen, die keiner der beiden Interpretationen eindeutig zugeordnet werden können.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

(a) Bei Darstellungen zum Aufteilen sind die Gesamtmenge und die Mächtigkeit der Teilmengen vorgegeben, während die Anzahl an Teilmengen gesucht wird. (b) Bei Darstellungen zum Verteilen sind dagegen jeweils die Gesamtmenge und eine Anzahl vorgegeben. Gesucht wird die Mächtigkeit der Teilmengen. (c) Diese letztgenannten Darstellungen zeichnen sich durch Offenheit aus, d. h. die Schulbuchdarstellung erwartet von den Kindern nicht, eine bestimmte Deutung oder Handlung nachzuvollziehen. Es handelt sich um Rechtecksdarstellungen, in die beide Vorstellungen hineininterpretiert werden können. Zudem können an diesen Darstellungen je zwei Multiplikationsaufgaben und zwei Divisionsaufgaben (u. a. Wittmann & Müller, 2014) hineingesehen werden, wodurch die Division auch als Umkehroperation der Multiplikation erkannt werden kann.

Mögliches Potenzial von Darstellungen der Division

Schulbuchdarstellungen enthalten das Potenzial zur vertieften Auseinandersetzung mit der Grundrechenoperation, wenn sie weitergedacht werden. Fruchtbar sind dabei insbesondere Rechtecksdarstellungen, wie am folgenden Beispiel zur Aufgabe 18 : 3 gezeigt wird. An einer 18 Punkte umfassenden, rechteckigen 3 · 6-Punktefeld-Darstellung (Abb. 1) kann die Divisionsaufgabe in allen oben benannten Facetten anschaulich gemacht werden.

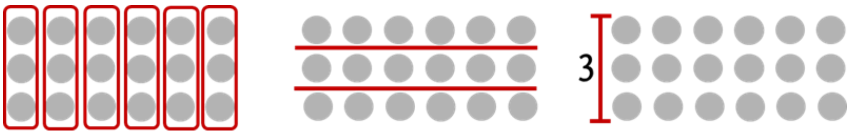

Abb.1 Interpretationsmöglichkeiten Division (Aufteilen, Verteilen, Längensichtweise)

Einerseits (Abb. 1, links) kann der *Aufteilungs*aspekt und somit die vorgegebene 3er-Mächtigkeit der Teilmenge in die Punktefelddarstellung hineingedeutet werden. Das Punktefeld wird in 3er Päckchen aufgeteilt und die Anzahl dieser Päckchen zeigt das Ergebnis der Divisionsaufgabe an. Andererseits können, entsprechend der Interpretationsidee *Verteilen*, die dargestellten Punkte gerecht (an 3) verteilt werden (Abb. 1, Mitte). Die Punktefelddarstellung muss für den Verteilprozess in 3 Teilmengen zerlegt werden. Diese Verteilung kann in dieser Darstellung der 18 als Zeilen wahrgenommen werden, deren je 6 Punkte das Ergebnis des Verteilprozesses und damit der Divisionsaufgabe darstellen. Sollen die Interpretationen der Darstellungen für Begründungen verallgemeinerbar werden, kann es gewinnbringend sein, eine dritte Sichtweise einzunehmen (Abb. 1, rechts). Bei der *Längensichtweise* wird der Divisor als Teiler angenommen. Die Teilerrelation in $\mathbb{N}$ sichert, dass es bei Divisionsaufgaben ohne Rest immer eine mögliche Rechtecksdarstellung gibt, bei der der Teiler – in diesem Fall der Teiler 3 – an den Seitenlängen sichtbar wird. Das Ergebnis der Division kann auf einen Blick an der anderen Seitenlänge abgelesen werden. Die Längensichtweise ermöglicht es, zusätzliche Informationen über die Teilbarkeit der dargestellten Zahl zu erhalten, da Teiler und Ko-Teiler als Seitenlängen in Relation zueinander erkannt werden können.

Diese Sichtweise einzunehmen und mit der Seitenlänge zu argumentieren ist mathematisch interessant, da Kinder dazu angeregt werden, „über das bloße Ausrechnen von Ergebnissen hinaus über die Bedeutung der Operationen und über Beziehungen zwischen Zahlen nachzudenken" (Wittmann & Müller, 2014, S. 126). Es wird möglich, sich vom konkreten Beispiel zu lösen und Rechtecksdarstellungen von Zahlen als Diagramme von Teilerrelationen zu deuten. Dann „stehen die Strukturen im Vordergrund der Betrachtung und ermöglichen die Deutung einer übergeordneten Beziehung" (Söbbeke, 2009, S. 115). Rechtecksdarstellung bieten darüber hinaus die Option, durch Zerlegen und Umlegen als gedankliche bzw. bei gegebenem Material als konkrete Handlung weitere, in den Seitenlängen enthaltene Teiler zu entdecken. So können auch auf den ersten Blick nicht direkt sichtbare Teiler verdeutlicht werden. Zur Verallgemeinerung sind durchweg keine Variablen notwendig, da Rechtecke solche Handlungen für alle strukturähnlichen Rechtecke erfahrbar machen (Schwarzkopf, 2017). Die Handlung ist damit als verallgemeinerbar gekennzeichnet und bietet sich für anschauliche Beweise an.

Das Projekt schauMal

Anschauliche Beweise werden mit Darstellungsmitteln umgesetzt. Es handelt sich dabei, so wie auch bei prämathematischen Beweisen nach Winter (1983), um Beweise „in der Sprache praktischer Handlungen (mit realen Dingen), die man wirklich oder nur in Gedanken ausführt" (S. 178). Diese Handlungen müssen als gleichbleibend (strukturell wiederholbar) erkannt werden, damit sie verallgemeinerbar sind. Die entsprechende Handlung kann zunehmend mental verinnerlicht werden, wenn sie zunächst mit Hilfe von konkret gegenständlichen Materialien oder zeichnerisch umgesetzt wird. Darstellungsmittel nehmen folglich bei anschaulichen Beweisen die Funktion eines Beweismittels ein und können Beziehungen sowie arithmetische Strukturen verdeutlichen (u. a. Dreyfus et al., 2012). Formale und anschauliche Beweise nutzen dieselben mathematischen Relationen. Wittmann & Ziegenbalg (2004) halten fest, dass sich die Beweise nur in ihren Darstellungsformen unterscheiden: „In dem einen Fall operiert man mit Steinchenmustern […], im anderen Fall mit Symbolen. Die an den Darstellungen vollzogenen Operationen sind aber im Grunde genommen gleich" (S. 35).

Wie aufgezeigt, bieten sich Rechtecksdarstellungen aufgrund ihrer Potenziale für anschauliche Beweise (Längensichtweise) an. Im Projekt schauMal werden fachlich und fachdidaktisch fundierte Unterrichtseinheiten zum anschaulichen Beweisen von Teilbarkeiten in Form von Lernumgebungen entwickelt und in einer Intervention implementiert. Das Projekt geht der Frage nach: *Inwiefern zeigen die entwickelten Unterrichtseinheiten Effekte auf die anschauliche Beweisfähigkeit?*

Insgesamt sechs dritte Klassen nehmen an der Studie teil; vier Klassen als Interventions- und zwei als Kontrollgruppen. Evaluiert wird die Intervention mittels Pre-Post- und Follow-up-Tests. Die Interventionsgruppen arbeiten mit verschiedenen Darstellungsmitteln, um herauszufinden, ob und welche Unterschiede sich beim Einsatz verschiedener Materialien zeigen. Als weitere Designvariable werden die Unterrichtseinheiten in je zwei Klassen von den jeweiligen Klassenleitungen bzw. von der Projektleitung implementiert.

In der Analyse der ersten Daten des Pre-Tests zeigt eine erste Durchsicht Bearbeitungen von Kindern, die in ihren Darstellungen verteilen bzw. aufteilen. Es scheint so zu sein, dass die Darstellungen aus Schulbüchern in Kinderlösungen zu Beginn des Projekts nachwirken. Ob sich dieser Trend fortsetzt und die mentalen Vorstellungen in diesem Sinne stabil sind oder ob die Unterrichtseinheiten auf die Deutungen der Kinder im Laufe des Projekts Einfluss haben, werden die genaueren Analysen der Daten ergeben.

Literatur

Dreyfus, T., Nardi, E. & Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (New ICMI Study Series, vol. 15, S. 191–213). Dordrecht: Springer Netherlands.

Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik*. Berlin: Springer Spektrum.

Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal rechnen lernen? Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, 31(306), 18–23.

Söbbeke, E. (2007). „Strukturwandel“ im Umgang mit Anschauungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift*, 21(201), S. 4–9.

Söbbeke, E. (2009). Welche Faktoren beeinflussen eine strukturorientiert relationale Deutung von Anschauungsmitteln? Ansätze zur Erhebung möglicher Rahmungen bei der Interpretation von Anschauungsmitteln in der Grundschule. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 115-118). Münster: WTM.

Winter, H. (1983). Prämathematische Beweise der Teilbarkeitsregeln. *mathematica didactica*, 6(3), 177–187.

Wittmann, E. Ch. & Ziegenbalg, J. (2004). Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In G. N. Müller, H. Steinbring & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 35–54). Seelze: Klett/Kallmeyer.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2014). *Das Zahlenbuch 2. Begleitband*. Stuttgart: Klett.