

Christos ITSIOS, Essen

Schülervorstellungen zu Potenzen

Sowohl Schülerinnen und Schüler als auch Studierende haben nach wie vor große Probleme im Umgang mit Potenzen. Dies konnte bereits in einigen Studien gezeigt werden (vgl. u. a. Büchter, 2016). Dieser bisher wenig erforschte Bereich in Zusammenhang mit den dazugehörigen Grundvorstellungen stellt den Grund für die Beschäftigung mit dieser Thematik dar.

Einleitung

Im vorliegenden Beitrag wird der Frage nach den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Potenzen nachgegangen. Die hier vorgestellte Studie gibt einen Einblick, was sich Lerner unter Potenzen überhaupt vorstellen können und wie sie einen bestimmten Potenzterm in andere Darstellungsformen übersetzen. Der flexible Umgang mit unterschiedlichen Repräsentationsarten wird als Beweis des Verständnisses im jeweiligen Bereich gesehen (vgl. Lesh, Post & Behr, 1987). Dies wird anhand von Grundvorstellungen analysiert und ausgewertet. Dieser Beitrag widmet sich den folgenden Forschungsfragen: Welche Schülervorstellungen zu Potenzen können identifiziert werden? Inwieweit sind Schülerinnen und Schüler in der Lage, aus einem gegebenen Potenzterm eine verbale Beschreibung zu konstruieren?

Theoretischer Hintergrund

Grundlage der Studie ist das von vom Hofe (1992) aufbereitete Grundvorstellungskonzept. Grundvorstellungen (GVen) beschreiben „Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung“ (vom Hofe 1995, S. 97). Unterschieden wird zwischen normativ gesetzten, für den Unterricht intendierten Grundvorstellungen und den tatsächlich vorhandenen Schülervorstellungen, welche die deskriptive Ebene darstellen. Der Prozess des Überbrückens eventueller Unterschiede zwischen normativer und deskriptiver Ebene wird mit der konstruktiven Ebene beschrieben. Eine erste Formulierung aus normativer Sicht zu den Grundvorstellungen bei Potenzen ist in Itsios & Barzel (2018) zu finden. Diese GVen wurden weiter verfeinert und mit Hilfe von Kolleginnen und Kollegen der Mathematikdidaktik wie folgt formuliert:

- *Wiederholtes Vervielfachen (WV)*: nach einer n-maligen Vervielfachung (hier: „Ver-a-fachung“) entstehen an Objekte. Diese GV kann weiter in zwei Unterkategorien gegliedert werden: eine zeitlich-sukzessive (WVz),

bei der eher auf den Prozesscharakter der Vervielfachung fokussiert wird, und eine räumlich-simultane (WVr), in der das „fertige“ Bild nach dem Prozess – also das Produkt – in den Mittelpunkt gestellt wird.

- *Kombinatorische Vorstellung (KV)*: Gibt es in einer Anordnung bzw. Situation n -mal hintereinander a Möglichkeiten oder Objekte, so gibt es insgesamt a^n Möglichkeiten, diese miteinander zu kombinieren.
- *Wiederholtes Skalieren (WS)*: Es findet eine Vergrößerung statt, ohne dass dabei neue Objekte entstehen, im Gegensatz zu WV. Die Vergrößerung – und keine Verkleinerung – wird dadurch festgelegt, dass es sich hierbei nur um Potenzen mit natürlichen Zahlen als Basis und Exponent handelt.

Methodologie

Die übergreifende Studie wurde in vier Zyklen entwickelt. Zunächst wurde anhand eines Fragebogens mit offenen Aufgaben eine qualitative Vorstudie durchgeführt, an fünf Schulen mit insgesamt 265 Probanden in den Klassen 9, 10 und 11. Im zweiten Zyklus wurden klinische Interviews mit drei Zehntklässlern durchgeführt, die an der Vorstudie nicht teilgenommen hatten, um die Gründe und Denkweisen der Probanden näher und tiefer zu untersuchen, welche nicht direkt an der Vorstudie beobachtet werden konnten. Der dritte Zyklus beinhaltet die Weiterentwicklung des Tests sowie dessen Einsatz mit 241 Schülerinnen und Schülern aus 4 unterschiedlichen Schulen, in den Klassen 9 und 10, die das Thema Potenzen im Mathematikunterricht bereits abgeschlossen hatten. Der Test besteht aus 23 Single-Choice Items, für deren Konstruktion die oben genannten GVen sowie möglichst viele Transformationen zwischen Darstellungen berücksichtigt wurden, um den Test so umfassend wie möglich zu gestalten. Die Rasch-Skalierung und das eventuelle Ausschließen bzw. Umformulieren von Items stellen den vierten Zyklus dar. In diesem Beitrag werden ausgewählte Ergebnisse aus den drei Interviews, anhand von zwei offenen Fragen, präsentiert. Diese sind:

- *A1: Was stellst du dir unter einer Potenz vor?*
- *A2: Kannst du zum Potenzterm 7^3 ein Bild malen, eine Geschichte oder eine Situation aus deinem Alltag erzählen oder dir eine Aufgabe ausdenken, wobei die Antwort 7^3 ist?*

Für die Datenanalyse bei A1 wurde ein System entwickelt, um die Antworten zu kategorisieren. Diese sind:

- *Wiederholte Multiplikation (WM)*: Es wird genannt, dass es sich um eine WM handelt.

- *Rolle des Exponenten (RE)*: Es wird explizit auf die Rolle des Exponenten eingegangen, d. h., dass dieser angibt, wie oft die Basis mit sich selbst multipliziert wird.
- *Basis (BA) / Exponent (EX)*: Diese Fachbegriffe werden explizit genannt.
- *Beispiel (BS) oder Beispiel mit Rechnung (BR)*: Es wird ein Beispiel für eine Potenz angegeben bzw. der Term wird ausgerechnet.
- *Bezeichnung (BZ)*: Es wird ohne Verwendung von Fachbegriffen genannt, dass es eine Hochzahl gibt, dass man oben rechts etwas schreibt, usw.
- *Abkürzung / Vereinfachung (AV)*: Es wird genannt, dass Potenzen eine Abkürzung einer Multiplikation oder eine Vereinfachung dieser darstellen.

Ergebnisse

Die Auswertung der Antworten bei A1 erfolgte mit Hilfe des o. g. Kodierschemas in einem induktiven Vorgehen durch eine kleine Expertengruppe (Kolleginnen und Kollegen der Arbeitsgruppe).

Zur wiederholten Multiplikation gehören bei den drei Probanden folgende Aussagen: „Vervielfachung“, „mal sich selber“, „eine Zahl immer mit sich selbst multipliziert“. In zwei der drei Fälle wird mit der Kategorie *Bezeichnung* geantwortet: „Hochzahlen“, „hoch zwei“, „hochgenommen“, „eine Zahl mit einer anderen Zahl, einer Hochzahl, (...) hoch x“.

Beispiele werden wie erwartet auch mit angegeben, meistens mit der entsprechenden Ausrechnung des Potenzterms: „Zehn hoch zwei, (...) die 10 wird also zweimal sich selber, also hochgenommen“, „fünf hoch fünf, (...) nicht 5 mal 5 mal 5 fünfmal“, „also a mal a mal a mal a wäre dann halt a hoch vier“.

Lediglich einmal wird die vereinfachende Funktion erwähnt und zwar als „5 hoch 5, es ist einfach zu schreiben, weil ja musst du ja nicht 5 mal 5 mal 5 fünfmal dorthin schreiben“.

Die meist beobachtete Antwort bei A2 hat mit dem ausgerechneten Potenzterm zu tun, d. h. mit $7^3 = 343$. Zwei Schüler haben den Potenzterm als Aufforderung zum Rechnen gesehen, indem sie mit der Multiplikation $7 \cdot 7 \cdot 7$ angefangen haben. Einer davon sagt noch explizit: „343. Was kann man damit (...) was ist eine typische Zahl im Alltag, was man, was vielleicht mit 343 zu tun haben könnte?“, und später „Ich denk halt immer an 343, (...) weil damit irgendwas mit zu tun haben muss“.

Die zweite Antwort, die von den Probanden noch erwähnt wird, ist die Verwechslung der Potenzierung mit der Multiplikation. Es werden Geschichten

bzw. Situationen erzählt, die eine multiplikative Struktur aufweisen, z. B. für den Umfang eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 7, oder „man muss 7 Meter laufen und dann noch das dreifache davon“.

Diskussion

Zusammenfassend kann anhand der Schülerantworten beobachtet werden, dass sie den Bereich der Potenzen nicht bzw. noch nicht richtig mit Inhalten füllen können. Ihr Denken ist hauptsächlich multiplikativ, Potenzen werden demnach lediglich begrifflich oder definatorisch wiedergegeben, meist korrekt, ohne dass sich dabei GVen entwickelt haben. Das ist nämlich das, was vom Hofe „Sinnlosigkeit“ nennt (vom Hofe 1992, S. 345), deren Ursache das unzureichende Verständnis elementarmathematischer Bereiche ist.

Die im Interview gegebenen Antworten entsprechen i. A. auch den angegebenen Antworten in der schriftlichen Version des Testinstruments im ersten Zyklus. Die einzige GV, die mit Hilfe der Interviewfragen aktiviert werden konnte, war die der wiederholten Vervielfachung (WV). Kontexte zu Kombinatorik oder Skalieren wurden nicht erwähnt.

Die Rasch-Skalierung im letzten Zyklus soll zukünftig Lehrpersonen die Möglichkeit geben, den Test in ihren Klassen einzusetzen, als Standortbestimmung, Diagnose und, wenn nötig, gezielte und individualisierte Förderung. Für einen einfachen Einsatz sowie schnell ausgewertete Ergebnisse ist die Implementierung des Tests in ein online Format geplant.

Literatur

- Büchter, A. (2016). *Zur Problematik des Übergangs von der Schule in die Hochschule – Diskussion aktueller Herausforderungen und Lösungsansätze für mathemathikhaltige Studiengänge*. Universitätsbibliothek Dortmund.
- Itsios, C. & Barzel, B. (2018). Potenzen und Potenzrechnung – eine Herausforderung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (Vol. 2, S. 867–870). Münster: WTM-Verlag.
- Lesh, R., Post, T. R. & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (S. 33–40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- vom Hofe, R. (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13(4), 345-364.
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.