

Solveig JENSEN, Osnabrück & Hedwig GASTEIGER, Osnabrück

Das Verständnis von schriftlichen Subtraktionsverfahren durch Erklärungen erfassen

Zur Zielsetzung der Thematisierung von schriftlichen Subtraktionsverfahren gehört heute, dass die Schüler*innen das Verfahren verstanden haben (KMK, 2005, S. 9). Zu konkretisieren ist, was es heißt, das Verfahren zu verstehen, und wie man feststellen kann, ob das Verfahren verstanden wurde.

Unterscheidung von Wissen und Verstehen

Vollrath und Roth (2012) unterscheiden beim Lernen von Mathematik die Aspekte Wissen und Verstehen und beziehen dies jeweils auf Begriffe, Sachverhalte (z.B. Beziehungen zwischen Begriffen) und Verfahren.

Für die vorliegende Frage interessiert die Unterscheidung von Wissen und Verstehen von Verfahren. Das Wissen von Verfahren wird beschrieben als „Wissen darüber [...], wie bestimmte Aufgaben gelöst werden“ (ebd., S. 45). Dieses Wissen wird von Vollrath und Roth (2012) mit Rückgriff auf die Kognitionspsychologie als prozedurales Wissen eingeordnet. Darunter werden die „Fertigkeiten zur Beherrschung der Verfahren“ gefasst. Demgegenüber ist ein Verfahren verstanden, wenn zum prozeduralen Wissen, „wie es geht“ (ebd., S. 49) und der Fähigkeit zur Anwendung u.a. dazukommt, zu „wissen, warum es funktioniert“ (ebd., S. 50).

Erklären-WIE und -WARUM als Zugänge zu Wissen und Verstehen

Wittmann (2009) beschreibt „Erklärsituationen als Schlüssel zu individuellen Konzepten mathematischer Begriffe und Verfahren“ (S. 94). Im Zusammenhang mit den oben aufgeführten Fähigkeiten, die Schüler*innen für die Demonstration von Wissen („wie es geht“) und Verstehen („warum es funktioniert“) von Verfahren zeigen sollen, lassen sich verschiedene Arten von Erklärungen unterscheiden: „In semantischer Hinsicht markieren die Fragewörter grundlegende Unterschiede: Die *was*-Frage – und ähnlich die *wer*-Frage – ist auf die konstitutiven und/oder sinngebenden Eigenschaften des zu Erklärenden gerichtet, die *wie*-Frage auf die Modalität von Prozessen, insbesondere Handlungen, und die *warum*-Frage auf kausale Faktoren (Ursachen, Gründe)“ (Klein, 2009, S. 26, Hervorheb. im Orig.). Auf diese Unterscheidung greift ebenfalls Schmidt-Thieme (2009) zurück und ordnet die Erklärtypen verschiedenen mathematischen Wissensfacetten bzw. Tätigkeiten zu: Erklären-WAS führe zu Begriffsbildung, „‘Erklären-WIE‘ befähigt den Adressaten zur korrekten Durchführung einer Handlung“ (ebd., S. 126) und „‘Erklären-WARUM‘ führt beim Adressaten zum Verständnis“ (ebd.).

Diese begrifflichen Präzisierungen leiten zu dem Schluss, dass es sinnvoll ist, das Wissen über Verfahren durch die Fähigkeiten zum Geben von Erklärungen-WIE zu erfassen und das Verstehen über Erklärungen-WARUM. (Anmerkung: Zu Diskussionen zur Unterscheidung von Begründen und Erklären-WARUM siehe z.B. Klein, 2001; der Unterschied wird hier im Ausgangspunkt der Sprachhandlung gesehen.)

Erklären-WIE und -WARUM der schriftlichen Subtraktionsverfahren

Für die schriftliche Subtraktion ist zu bedenken, dass es verschiedene Verfahren gibt. Wissen über das gelernte Verfahren heißt nach der obigen Unterscheidung u.a., dass die Schüler*innen erklären können, WIE das jeweilige Verfahren funktioniert. Sie können also die einzelnen Verfahrensschritte beschreiben. Erklärungen-WARUM, d.h. die Angabe von Gründen für das Funktionieren des gelernten Verfahrens, speziell der Übergangstechnik, sind eine Möglichkeit zu erfassen, ob die Schüler*innen das Verfahren auch verstanden haben. Die Gründe für die Funktionsweise unterscheiden sich dabei je nach Übergangstechnik.

Ein erster Versuch, die von Kindern gegebenen Beschreibungen und Erklärungen für das „Abziehen mit Entbündeln“ und das „Ergänzen mit Erweitern“ hinsichtlich ihres Begründungsgehaltes zu kategorisieren, findet sich in Jensen und Gasteiger (2019); eine Einordnung bzgl. Erklärungen-WIE und Erklärungen-WARUM in Jensen und Gasteiger (im Druck). Die für die Beiträge Jensen und Gasteiger (2019, im Druck) erhobenen Daten enthielten keine Beispiele für gehaltvolle Erklärungen des „Erweiterns“. Um auch für dieses Verfahren das Verstehen fassen zu können, wurden Schülerantworten aus einer Pilotierungsstudie zu einer Fragestellung zur Erfassung des Verständnisses analysiert. Die folgenden Beispiele stammen von Viertklässler*innen, die durch die Aufgabenstellung dazu aufgefordert wurden, „Timos“ Bearbeitung der Aufgabe 555-284 (mit Merkmahl 10 über der 5 in der Zehnerspalte und Merkmahl 1 unter der 2) zu erklären.

Ein gutes Beispiel für den klaren Versuch einer Erklärung-WIE ist folgender (bereinigte) Text eines Kindes: *„Du musst einfach wo der zehn steht und unter der zehn steht eine fünf weil fünf minus acht geht ja nicht deshalb muss man immer eine 10 dazu tun und bei der nächsten aufgabe muss unter 2 eine 1 stehen ist doch nicht so schwer.“* Folgt man der Unterscheidung zwischen prozeduralem Wissen und Verstehen (Vollrath & Roth, 2012), lässt sich hier kein Verstehen des Verfahrens ablesen, da offensichtlich kein Grund für das Funktionieren des Verfahrens genannt wird. Die Legitimation des „Erweiterns“ ist das Nutzen der Konstanz der Differenz: Ist der Ziffernwert im Minuenden kleiner als der im Subtrahenden, wird in der entsprechenden Stelle

der Minuend um zehn Bündelungseinheiten erweitert. Damit sich die Differenz nicht ändert, wird auch der Subtrahend in der nächsthöheren Stelle um eine Bündelungseinheit erweitert. Dieses Gesetz klingt in folgender Erklärung an: „*Timo hat einen Übertrag gemacht. Das bedeutet die fünf ist kleiner als die acht. Dann hat er um zehn erweitert und unter die zwei eine eins gesetzt damit das gewicht ausgeglichen wird.*“ Dies verweist auf die Notwendigkeit der gleichsinnigen Veränderung von Minuend und Subtrahend. Fraglich ist jedoch hier, ob diese Erklärung ein Verständnis des Verfahrens zeigt. Auf den ersten Blick scheint das Kind den Grund für das Funktionieren anzugeben, denn das allgemeine Gesetz wird erwähnt („das gewicht ausgeglichen“). Allerdings wird damit das begründete Zustandekommen der Merzkahlen nicht aufgegriffen. Im Beispiel fehlt die Erklärung, warum durch die Erweiterung mit 10 und 1 „das gewicht ausgeglichen“ ist. Dafür müsste erklärt werden, dass mit den notierten Merzkahlen 10 Zehner und 1 Hunderter gemeint sind und diese die gleiche Anzahl repräsentieren. Ein anderes Kind spricht diese Gleichheit mit seiner Erklärung an: „*da muss oben eine Zehn stehen weil 10 Zehner ein Hunderter ist.*“ Dieses Kind interpretiert die Bedeutung der Merzkahlen. Für sich genommen ist aber auch diese Erklärung nicht ausreichend, weil wiederum der Verweis auf die gleichzeitige Veränderung von Minuend und Subtrahend fehlt.

So wie Sfard (1994) es für mathematische Symbole beschreibt, die Konzept und Prozess gleichzeitig symbolisieren, wird durch die Notation der Merzkahlen auch ein Prozess repräsentiert: Beide Zahlen – Minuend und Subtrahend – werden gleichsinnig verändert und damit das Gesetz der Konstanz der Differenz angewendet. Dieser Prozess ist für das Verstehen des Konzeptes (des Vorgangs beim Algorithmus) notwendig. Dabei scheinen für eine komplette Erklärung-WARUM zwei Elemente entscheidend: Zum einen muss die Veränderung der beiden Zahlen beschrieben werden (fehlt der Erklärung, bei der nur die Gleichheit der Anzahlen 10 Zehner und 1 Hunderter benannt wird), zum anderen muss deutlich werden, dass diese Veränderung für beide Zahlen gleich groß ist (und deshalb die Differenz zwischen beiden Zahlen gleich bleibt; angedeutet, aber nicht explizit in der Erklärung, in der der Gewichtsausgleich als Grund herangezogen wird). Für das Entbündeln heißt die Interpretation der Merzkahlen als Notation eines Vorganges, dass der Entbündelungsvorgang von einer größeren Bündelungseinheit in zehn kleinere erklärt werden kann (z.B. „*einen von den Hundertern wegnehmen und daraus 10 Zehner machen*“, Jensen & Gasteiger, im Druck). Dies kann als Erklärung-WARUM gewertet werden, weil auf die Möglichkeit verwiesen wird, gleiche Anzahlen in verschiedenen Bündelungseinheiten darzustellen (Bündelungsprinzip).

Fazit

Für die Prüfung von Wissen und Verstehen der Verfahren der schriftlichen Subtraktion scheinen Erklärungen-WIE und Erklärungen-WARUM geeignete Mittel. Die Beispiele machen deutlich, dass Erklärungen-WARUM keine angereicherten Erklärungen-WIE sind, sondern für die Erklärungen-WARUM neue Elemente vonnöten sind. Damit müssen die Kinder für die Demonstration von Verstehen andere Fähigkeiten zeigen als für die Demonstration von Wissen: Die Merzkahlen müssen inhaltlich interpretiert werden. Für das Entbündeln muss das Bündelungsprinzip verstanden worden sein und so der entsprechende Vorgang beschrieben werden, für das Erweitern der Prozess des gleichsinnigen Veränderns erfasst und durch die Konstanz der Differenz erklärt werden können.

Literatur

- Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative vergleichende Studie zu spezifischen Fehlern und Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematikdidaktik* 40, 135–167.
- Jensen, S. & Gasteiger, H. (im Druck). Bewertung von Begründungen zu schriftlichen Subtraktionsverfahren. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019*.
- Klein, J. (2001). ‚Erklären‘ und ‚Argumentieren‘ als interaktive Gesprächsstrukturen. In K. Brinker, G. Antos, W. Heinemann & S. F. Sager (Hrsg.), *Text- und Gesprächslinguistik. 2. Halbband: Gesprächslinguistik* (S. 1309–1329). Berlin & New York: de Gruyter.
- Klein, J. (2009). ERKLÄREN-WAS, ERKLÄREN-WIE, ERKLÄREN-WARUM. Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In R. Vogt (Hrsg.), *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 25–36). Tübingen: Stauffenberg.
- KMK: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005) (Hrsg.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*. München & Neuwied: Luchterhand.
- Schmidt-Thieme, B. (2009). „Definition, Satz, Beweis“. Erklärgewohnheiten im Fach Mathematik. In R. Vogt (Hrsg.), *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 123–131). Tübingen: Stauffenberg.
- Sfard, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22 (1), 1–36.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Wittmann, G. (2009). Erklärsituationen als Schlüssel zu individuellen Konzepten mathematischer Begriffe und Verfahren. Ein Überblick über mathematikdidaktische Forschungsansätze. In J. Spreckels (Hrsg.), *Erklären im Kontext. Neue Perspektiven aus der Gesprächs- und Unterrichtsforschung* (S. 94–118). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.