

Valentin KATTER, Bielefeld

Inhaltliche Kompetenzen von Lehramtsstudierenden im Bereich Trigonometrie

Schaut man sich den neuen Kernlehrplan für NRW der Sekundarstufe I (2019) im Fach Mathematik an, so kann man feststellen, dass die Trigonometrie sowohl in der Geometrie, zur Berechnung unbekannter Größen in beliebigen Dreiecken, als auch im Bereich der Funktionen, zur Beschreibung periodischer Prozesse, eine wichtige Rolle spielt. Vergleicht man den Kernlehrplan mit der Vorgängerversion aus dem Jahr 2007, sieht man, dass die Inhalte in der Trigonometrie erweitert wurden: In der Geometrie hat der Kosinussatz wieder Einzug gehalten und im Bereich der Funktionen sollen Schülerinnen und Schüler „die Sinus- und Kosinusfunktion als Verallgemeinerung der trigonometrischen Definition des Sinus und des Kosinus am Einheitskreis“ erläutern. Darüber hinaus wird das Bogenmaß wieder thematisiert und die Parameter in der Funktionsgleichung $f(t) = a \cdot \sin\left(t \cdot \frac{T}{2\pi}\right)$ sollen als Amplitude und Periode periodischer Vorgänge gedeutet werden.

Im Lichte dieser Neuerungen wird zwei Fragen besonderer Nachdruck verliehen: Welche inhaltlichen Kompetenzen sollten angehenden Lehrkräften in der Trigonometrie vermittelt werden? Mit welchen inhaltlichen Kompetenzen sind Lehramtsstudierende im Bereich Trigonometrie tatsächlich ausgestattet?

In zahlreichen englischsprachigen empirischen Studien wurde herausgefunden, dass Studierende ihr Studium zum Teil mit erheblichen Defiziten im Umgang mit trigonometrischen Funktionen beginnen. In diesen Studien wurden unter anderem Probleme im Umgang mit dem Bogenmaß aufgezeigt (Akkoc, 2008), Schwierigkeiten beim Übergang vom Einheitskreis zum Funktionsgraphen der Sinusfunktion identifiziert (Brown, 2005) sowie mangelnde fachliche Kenntnisse im Bereich der Trigonometrie (Fi, 2003) festgestellt. Studien, welche die Situation an deutschen Universitäten darstellen, sind bisher nicht bekannt. Vorläufige Ergebnisse dieser Studie an der Universität Bielefeld lassen darauf schließen, dass die Situation sich ähnlich darstellt.

Was sind inhaltliche Kompetenzen im Bereich Trigonometrie?

Welche inhaltlichen Kompetenzen angehende Lehrende im Bereich Trigonometrie auf normativer Ebene entwickeln sollten, lässt sich am besten durch eine didaktisch orientierte Sachanalyse herausstellen. Dazu wird zunächst ein Blick auf unterschiedliche Zielgruppen geworfen, die sich mit der

Trigonometrie auseinandersetzen und an die unterschiedliche Anforderungen gestellt werden. Wir beschränken uns in dieser Sachanalyse auf die drei für den Lehramtsstudierenden relevanten Zielgruppen: Gymnasialschüler, Mathematikstudierende und Lehramtsstudierende. Zu diesen drei Zielgruppen lassen sich jeweils inhaltliche Anforderungen auf den folgenden Grundlagen formulieren:

- Inhaltliche Anforderungen der Kernlehrpläne an die Schülerinnen und Schüler
- Inhaltliche Anforderungen des mathematischen Fachstudiums an Mathematikstudierende
- Inhaltliche Anforderungen des Lehramtsstudiums an Lehramtsstudierende.

Die inhaltlichen Anforderungen der Kernlehrpläne sind klar definiert. Sie beziehen sich auf einen verständigen Umgang mit der Sinusfunktion in Sachkontexten, an Dreiecken, am Einheitskreis und auf analytischer Ebene als Funktionsterm bzw. Funktionsgraphen.

Das mathematische Fachstudium fordert darüber hinaus eine klare analytische Charakterisierung bzw. Einordnung der Sinusfunktion in das jeweilige formale System. Dies kann durch die Definition der Sinusfunktion als Taylorreihe oder als Lösung der Differentialgleichung $y'' + y = 0$ geschehen.

Das Lehramtsstudium fordert eine Vernetzung der oben genannten Inhalte. Lehramtsstudierende sollten erlernen, Schülern die Zusammenhänge im Bereich der Trigonometrie verständlich zu erklären.

Zusammenhänge können beispielsweise zwischen Anwendungskontexten und mathematischen Definitionen hergestellt werden (z.B. zwischen Landvermessungen und der Definition des Sinus am rechtwinkligen Dreieck). Solche Verknüpfungen bilden die Grundlage zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen. Weitere Zusammenhänge können zwischen unterschiedlichen mathematischen Definitionen bzw. Darstellungen hergestellt werden, wodurch Grundvorstellungen miteinander vernetzt und somit flexibel genutzt werden können (z.B. zwischen Einheitskreis und dem Graphen der Sinusfunktion). Auf der Grundlage dieser didaktisch orientierten Sachanalyse wurde ein Test entwickelt, der die jeweiligen inhaltlichen Kompetenzen der Lehramtsstudierenden überprüft.

Methodisches Vorgehen

Im ersten Schritt dieser Studie wurden Aufgaben entwickelt, welche die ausgewählten Kompetenzen auf theoretischer Ebene möglichst gut abbilden.

Diese Aufgaben wurden in vier Didaktik Seminaren an der Universität Bielefeld an insgesamt 61 Lehramtsstudierenden der gymnasialen Oberstufe im Sommersemester 2019 und Wintersemester 2019/20 getestet. Basierend auf den Ergebnissen dieser Vorstudie wird ein Test entwickelt, der ein möglichst breites Spektrum an inhaltlichen Kompetenzen der Lehramtsstudierenden abbildet und gleichzeitig einen Einblick in potenzielle Grund- und Fehlvorstellungen der Studierenden ermöglicht.

Ergebnisse der Vorstudie

In Hinblick auf die inhaltlichen Anforderungen der Kernlehrpläne tauchten die größten Schwierigkeiten bei Aufgaben auf, die in einen Sachkontext eingebettet waren. Es war vielen Studierenden nicht möglich einen passenden Funktionsterm zu finden, der die Schwingung eines Federpendels modelliert. Auch typische Schulbuchaufgaben, wie das Berechnen der Höhe einer Gondel auf einem Riesenrad hatten eine geringe Lösungswahrscheinlichkeit.

Weitere Probleme tauchten bei der Nutzung von Winkeln in Bogenmaß auf. Studierende waren oftmals nicht in der Lage Gradmaß in Bogenmaß umzuwandeln. Darüber hinaus wurde die Sinusfunktion zweckentfremdet, indem sie als Werkzeug benutzt wurde, um zwischen den beiden Winkelmaßen zu übersetzen. Das wiederum führte dazu, dass die Sinusfunktion unmögliche Funktionswerte annahm. Dies wurde in besonderem Maße bei der folgenden Aufgabe deutlich: „Schätze, wie groß $\sin(170^\circ)$ ungefähr ist. Beschreibe, wie du beim Schätzen vorgegangen bist“. Diese Aufgabe brachte unter anderem die nachstehenden Lösungen hervor:

$$\sin(170^\circ) \approx 0,4\pi$$

$\approx 1,25$
 $\approx 0,45$ weil ≈ 170 von 360 , weniger als Hälfte

$\sin(170^\circ)$ muss etwas kleiner sein als π .

Aufgaben die auf die inhaltlichen Anforderungen des Lehramtsstudiums abzielen zeigten, dass Studierende erhebliche Probleme haben, schülergerechte Antworten zu mathematischen Problemstellungen zu formulieren. Als kennzeichnendes Beispiel dient die folgende Aufgabe:

Ein Nachhilfeschüler fragt dich: Wie groß ist ein Winkel α wenn $\sin(\alpha)$ gleich $1,35$ ist. Formuliere eine sinnvolle Antwort.

Nur die Hälfte der Probanden formulierte eine Antwort und nur drei Studierende gaben eine Erklärung anhand eines rechtwinkligen Dreiecks oder des Graphen der Sinusfunktion. Alle anderen verwiesen darauf, dass ein solches α nicht existiert und gaben keine weitere Begründung an.

Als letztes Ergebnis soll auf eine Fehlvorstellung hingewiesen werden, die bei drei Studierenden erkennbar wurde. Dabei handelt es sich um die Vorstellung des Graphen der Sinusfunktion als eine Kurve, die halbkreisförmig oberhalb und unterhalb der x-Achse verläuft.

Sinus beschreibt eine Kurve welche gleichmäßig große Halbkreise oberhalb und unterhalb der x-Achse verläuft.



Diskussion

Die bisherigen Ergebnisse geben einen Einblick in mögliche Fehlvorstellungen und typische Fehler von Lehramtsstudenten. Man kann feststellen, dass vereinzelte inhaltliche Anforderungen aus der Sekundarstufe II bei einigen Lehramtsstudenten nicht erfüllt werden und dass einige Studierende Schwierigkeiten haben mathematische Sachverhalte zu begründen. Ein mögliches Erklärungsmodell stützt sich auf fehlende Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. Diese Grundvorstellungen wurden auf normative Ebene von Frohn und Salle (2017) definiert. Bislang fehlt jedoch ein empirischer Nachweis dieser Grundvorstellungen. Um einen Einblick in mögliche Grundvorstellungen zu erhalten sind qualitative Interviews geplant.

Literatur

- Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857–878.
- Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine*. Illinois State University.
- Fi, C. D. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*.
- Moore, K. C. (2010). *The role of quantitative reasoning in precalculus students learning central concepts of trigonometry*. Arizona State University.
- Frohn, D. & Salle, A. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. *mathematik lehren*, 204.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes NRW (Hrsg.), *Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gymnasium in Nordrhein-Westfalen* (i.d.F.v. 1. Aufl. 2019). Frechen: Ritterbach Verlag.