Leander KEMPEN, Rostock, Sandra KRÄMER, Paderborn &
Rolf BIEHLER, Paderborn

Was verstehen Schülerinnen und Schüler unter „Beweis"? – ausgewählte Ergebnisse einer Pilotstudie

Im Rahmen einer Interviewstudie wurde beforscht, welche Vorstellungen Abiturientinnen und Abiturienten zum mathematischen Beweisbegriff haben. In diesem Artikel berichten wir über die Ergebnisse der Pilotstudie, in deren Rahmen vier Schülerinnen und Schüler einer Berufsschule zunächst zwei Beweisaufgaben bearbeiteten und anschließend in einem Interview ihre Beweiskonstruktionen reflektierten.

Einleitung

International liegen verschiedene Forschungsergebnisse bzgl. der Beweiskonstruktion, der Beweisbewertung und des Beweisverständnisses von Erstsemesterstudierenden vor. Eine offene Frage ist allerdings, mit welchen Vorstellungen zum Beweisbegriff die angehenden Studierenden an die Universität kommen. Da Studienanfängerinnen und -anfänger Vorerfahrungen zum Beweisen aus dem schulischen Mathematikunterricht mitbringen (Kempen, 2019, S. 331 ff.) und auch der Operator „Beweisen Sie" im Unterricht Verwendung findet, kann davon ausgegangen werden, dass die angehenden Studierenden zumindest implizit über Vorstellungen zum Beweisbegriff verfügen, die im schulunterrichtlichen Geschehen ausgebildet wurden. Wir sehen die Erforschung von Beweisvorstellungen von angehenden Studierenden als sinnvoll an, damit die Ausbildung an der Universität an diese anknüpfen kann. Dabei ergibt sich die Einigkeit über die Bedeutung des Beweisbegriffs aller am Lehr-/Lernprozess Beteiligter als eine notwendige Voraussetzung, um sinnstiftende Lernprozesse anbahnen zu können. Dazu werden Vorstellungen zum Beweisbegriff konzeptualisiert und vorhandene Fehlvorstellungen herausgearbeitet.

Theoretischer Hintergrund

Recio und Godio (2001) analysieren die Beweiskonstruktionen von Studierenden und versuchen, unter der Berücksichtigung der proof schemes nach Harel und Sowder (1998), die Beweisvorstellungen („personal meanings") der Probanden herauszuarbeiten. Diese Autoren unterscheiden auf der Basis von Beweisbearbeitungen die folgenden proof schemes (ebd., S. 91 ff.): (i) „explanatory argumentative schemes" als möglicher Hintergrund einer Beweisbearbeitung, in der ausschließlich konkrete Beispiele betrachtet werden,

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

ohne dass eine (induktiv oder deduktiv begründete) Verallgemeinerung vorgenommen wird; (ii) „empirical-inductive proof schemes“ als möglicher Hintergrund einer Beweisbearbeitung, in der nach der Betrachtung konkreter Beispiele eine (unvollständige) induktive Verallgemeinerung vorgenommen wird; (iii) „informal deductive proof schemes“ als möglicher Hintergrund einer deduktiven Begründung, in der auch nicht-formale Argumente (Analogiebetrachtungen, Folgerungen aus graphischen Betrachtungen, etc.) verwendet werden und (iv) „formal deductive proof schemes“ als möglicher Hintergrund einer Beweiskonstruktion, die vor allem unter der Verwendung mathematischer Symbolik erfolgt. Die Untersuchungen von Recio & Godio stellen den theoretischen Ausgangspunkt für unsere Studie dar. Für eine Beschreibung verschiedener Beweisprodukte, unter der Berücksichtigung der verwendeten Darstellungsmittel, beziehen wir uns auf die Kategorisierung von Reid und Knipping (2010, 30 S. ff.). In „empirischen Argumentationen“ wird eine (unvollständige) induktive Verallgemeinerung nach der Betrachtung konkreter Beispiele vorgenommen. In „generischen Beweisen“ erfolgt die allgemeingültige Begründung über die Herausstellung eines allgemeingültigen, beispielübergreifenden Arguments. Während in „narrativen Beweisen“ der Schriftsprache bei der Explizierung der Argumentation eine Hauptrolle zukommt, liegt in „formalen Beweisen“ der Schwerpunkt auf der Verwendung mathematischer Symbolik und Notation.

Forschungsfragen

(1) Wie bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Beweisaufgaben aus der elementaren Arithmetik und Geometrie? (2) Welche Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zu mathematischen Beweisen lassen sich aus den Bearbeitungs- und Reflexionsprozessen rekonstruieren?

Datenerhebung und Datenauswertung

Die Datenerhebung erfolgte nach dem Konzept des *task-based interview* (Goldin, 2000). Zunächst wurden den Probanden die folgenden zwei Aufgaben zur Bearbeitung vorgelegt: (1) „Beweise, dass die Summe aus einer ungeraden Zahl und ihrem Doppelten immer ungerade ist.“ (Kempen, 2019, 185 ff.) und (2) „Wir betrachten zwei Nebenwinkel α und β. Beweise, dass der Winkel zwischen den Winkelhalbierenden von α und β immer $90°$ beträgt.“ (Recio & Godino, 2001, S. 85). Der zweiten Aufgabe war eine Skizze mit farblicher Hervorhebung der Nebenwinkel und der Winkelhalbierenden beigefügt (vgl. Krämer, 2019, S. 35). Im Anschluss an die Aufgabenbearbeitung folgte ein Leitfadeninterview, in dessen Kontext die Probanden ihre Beweiskonstruktionen erläutern, bewerten und reflektieren sollten.

An der Pilotstudie nahmen zwei Schülerinnen und zwei Schüler in ihrem letzten Schuljahr an einer Berufsschule teil (Alter: aMittel=20, zwei Probanden mit Leistungskurs, zwei mit Grundkurs in Mathematik). Bei der Auswertung der Daten wurden die Beweisbearbeitungen der Probanden zunächst einer der oben aufgeführten Kategorien nach Reid und Knipping (2010) zugeordnet. Die Transkripte der Interviews wurden anschließend in Bezug auf Äußerungen der Probanden zum Beweisbegriff durchsucht und unter Berücksichtigung der oben thematisierten „proof schemes" analysiert.

Ergebnisse

Bei der Bearbeitung der Aufgabe 1 kommt nur der erste Proband mit dem Versuch eines generischen Beweises über eine bloße empirische Argumentation hinaus. Bei der Bearbeitung der zweiten Aufgabe werden nur von den ersten beiden Probanden sinnvolle Aspekte benannt: Während der erste Proband ein dynamisch-visuelles Argument anführt (s.u.), versucht Proband 2 eine Argumentation mithilfe einer Formalisierung.

Proband 1 gibt in Aufgabe 1 mit Bezugnahme auf seine Zahlenbeispiele eine vollständige sprachliche Begründung der Behauptung. Die Verschriftlichung seiner Begründung ist dann allerdings unvollständig, wodurch der daraus resultierende generische Beweis unvollständig bleibt. Bei Aufgabe 2 beschreibt dieser Proband, dass sich bei einer Veränderung der Nebenwinkel die beiden Winkelhalbierenden entsprechend mitverändern würden, deren eingeschlossener Winkel dabei also konstant bliebe. Bzgl. der Beweisvorstellungen konnte bei Proband 1, aufgrund der Beweisbearbeitungen und der Äußerungen im anschließenden Interview, festgestellt werden, dass diese dem „informal deductive proof scheme" entsprechen: Proband 1 versucht die Gültigkeit der Behauptung für alle möglichen Fälle auch unter Einbeziehung nicht-formaler Argumente nachzuweisen. Proband 2 formalisiert in Aufgabe 2 die Behauptung und weist mit Hilfe von Termumformungen die gegebene Behauptung nach; auch er versucht, die gegebenen Behauptungen allgemeingültig zu verifizieren. Während Proband 2 allerdings bei der ersten Aufgabe aufgrund verschiedener Verständnisprobleme keine Formalisierung versucht, ist seine Beweiskonstruktion zur zweiten Aufgabe von formalen Aspekten geprägt. Daher wird diesem Probanden das „formal deductive proof scheme" zugewiesen. Bei Proband 3 wird im Interview deutlich, dass er zwei verschiedene Bedeutungen des Beweisbegriffs verwendet. Auf die Frage, was ihm gut gelungen sei, antwortet Proband 3: „Ja, gut gelungen, das aufzustellen erstmal, das genau zu beweisen halt, aber dann logisch das zu beweisen ist – glaube ich ein bisschen schwieriger für mich gewesen. […] Nicht jetzt nur an diesem einen Beispiel gesehen, sondern halt immer das zu sagen, dass es immer so ist." Entsprechende Äußerungen macht dieser Proband auch bzgl. seiner Bearbeitung von Aufgabe 2, in dessen Rahmen er zunächst den rechten Winkel in der Abbildung mithilfe eines Geodreiecks verifiziert hatte. Während für Proband 3 „Beweis" einmal einen Nachweis in konkreten Einzelfällen bedeuten kann, bezeichnet für ihn „logischer Beweis" die allgemeingültige Verifikation einer Behauptung. Insgesamt scheinen die Beweisvorstellungen dieses Probanden somit einem „deductive proof scheme" zu entsprechen. Auch Proband 4 ist sich der Unzulänglichkeit seiner empirischen Argumentation bewusst. Wie aber zuvor schon Proband 3, benutzt auch dieser Proband den Beweisbegriff mit zwei verschiedenen Konnotationen: Einmal für einen Nachweis mithilfe von konkreten Beispielen und einmal für eine allgemeingültige Verifikation.

Diskussion und Ausblick

Bei allen Probanden konnte zumindest teilweise ein „deductive proof scheme" nachgewiesen werden. Interessant erscheint, dass zwei Probanden den Beweisbegriff mit zwei verschiedenen Bedeutungen verwendeten: Einmal als Nachweis mithilfe konkreter Beispiele (i. S. eines „empirical proof scheme") und im Gegensatz dazu auch als allgemeingültige Verifikation (i. S. eines „deductive proof scheme"). Insbesondere diesem Phänomen soll in der anstehenden Hauptstudie näher nachgegangen werden. Insgesamt hat sich gezeigt, dass die Kombination aus Beweiskonstruktion und anschließender Reflexion der eigenen Bearbeitung eine gewinnbringende Methode für die Untersuchung der Beweisvorstellungen der Probanden darstellt.

Literatur

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Krämer, S. (2019). *Beweisvorstellungen von Abiturientinnen und Abiturienten – eine qualitative Interviewstudie auf der Grundlage individueller Beweiskonstruktionen* [Masterarbeit]. Paderborn: Universität Paderborn.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Hrsg.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (S. 517-546). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education* III, 7, 234–282.

Recio, A. M. & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83–99. http://www.springerlink.com/content/htw93tfdk9cyw6jx/ (20.12.2019)

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.