

Christoph KIRFEL, Bergen (Norwegen)

## Die Fächermethode zur Bestimmung von Integralen

### Einleitung

In "Proofs Without Words" sammelt Roger B. Nelsen (2000) eine Reihe mathematischer Resultate mit anschaulichen Beweisen, die kaum Erklärungen in Form von Text benötigen. Dort (S. 63) finden wir auch folgende schöne Illustration des Resultates  $\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(A)$  von Aage Bondesen. In diesem Beitrag möchten wir zeigen, wie die dort benutzte Methode auf andere Funktionen übertragen werden kann. Die Argumente beschränken sich auf elementargeometrische Überlegungen. Die Fächermethode lässt sich leicht nach der Einführung des Riemannintegrals behandeln und zum tieferen Verständnis des letzteren verwenden. Minimale Vorkenntnisse sind notwendig.

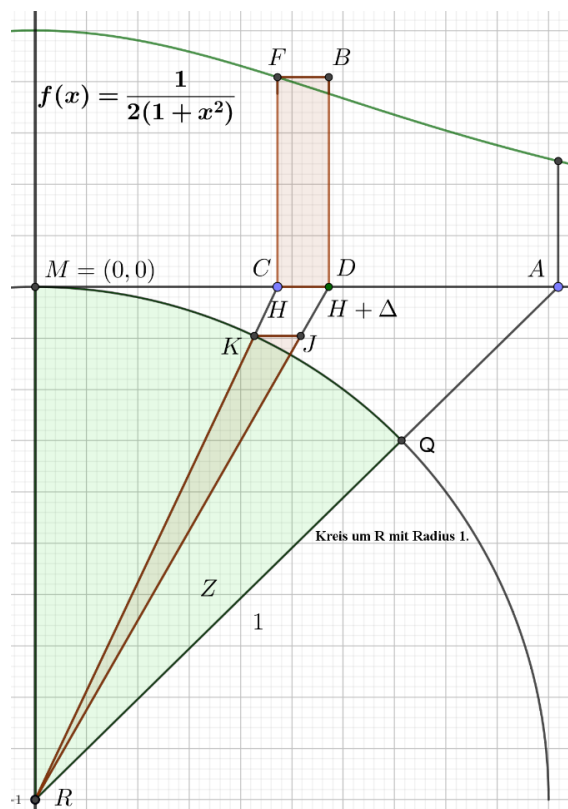


Abb. 1 (GeoGebra)

### Der Arkustangens

Wir stellen uns das Riemannintegral unter dem Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2(1+x^2)}$  als „bestehend“ aus einer Folge von Riemann-Kästchen vor. Eines davon sehen wir hier, nämlich das Rechteck  $CDBF$ . Wir verbinden  $C$  und  $D$  mit dem festen Punkt  $R(0, -1)$  und stellen fest, dass das Dreieck  $RCD$  den Flächeninhalt  $\frac{\Delta}{2}$  hat, wobei  $C$  und  $D$  gerade  $\Delta$  Einheiten auseinanderliegen. Wir verkleinern nun das Dreieck  $RCD$  auf die Größe  $RKJ$ , wobei  $K$  auf dem um eine Einheit nach unten verschobenen Einheitskreis liegt. Dann können wir den Flächeninhalt des verkleinerten Dreiecks

berechnen, indem wir das Verkleinerungsverhältnis  $KR/CR$  quadrieren. Es gilt aber  $\frac{KR}{CR} = \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}$ . Und damit ist der Flächeninhalt des Dreiecks  $RKJ$  gerade  $\frac{\Delta}{2(1+H^2)}$  und entspricht damit genau dem Riemann-Kästchen unter dem

Graphen der Funktion  $f$ . Summiert man nun über dem Intervall  $[0, A]$  auf, erhält man auf der einen Seite  $\int_0^A \frac{dx}{2(1+x^2)}$  und auf der anderen Seite die Fläche des Kreissektors  $QRM$ , die ja dem Winkel  $\angle QRM$  entspricht. Dieser Winkel ist aber gerade  $\arctan(A)/2$ , wodurch der Beweis dann vollendet ist. Das aus nebeneinander aufgestellten Riemann-Kästchen bestehende Integral ist hierbei in eine fächerähnliche Figur überführt worden.

Im Folgenden versuchen wir nun, die vorgestellte Idee zu generalisieren. Um die Fläche unter dem Graphen einer Funktion zu bestimmen, teilen wir diese in der bekannten Weise in Riemann-Kästchen auf. Diese Rechtecke tauschen wir nun gegen geeignete Dreiecke ein, deren Spitzen in einem festen Punkt zusammenlaufen. Die zunächst entstehenden Dreiecke (Flächeninhalt  $\Delta/2$ ), müssen wir nun mit einem geeigneten Faktor verkleinern, um sie auf die erforderliche Größe zu bringen. Einer der Eckpunkte des verkleinerten Dreiecks liegt dann auf der gesuchten Funktion  $g$ . Damit ist ein Zusammenhang zwischen zwei Integralen hergestellt und wie im gezeigten Beispiel können „einfache“ Integrale mit komplizierteren verknüpft und anschaulich illustriert werden. Dies wollen wir nun weiter erforschen.

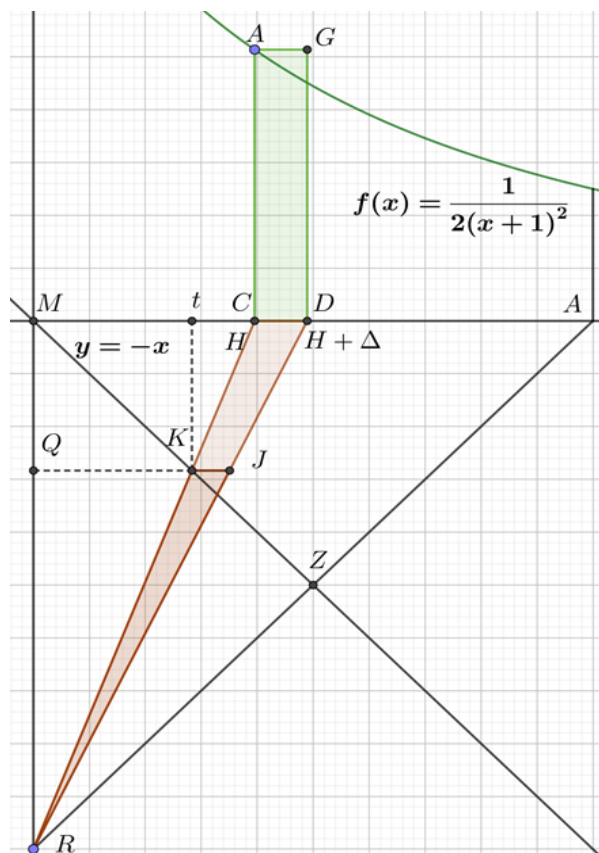


Abb. 2 (GeoGebra)

Im nächsten Beispiel geht es um die Bestimmung der Fläche unter der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2(1+x)^2}$  über dem Intervall  $[0, A]$ . Die Idee ist wieder, Riemann-Kästchen durch Dreiecke gleichen Flächeninhaltes zu ersetzen. Das Riemann-Rechteck  $CDGA$  hat den Flächeninhalt  $\Delta \cdot f(H) = \frac{\Delta}{2(1+H)^2}$ . Das Dreieck  $RCD$  dagegen hat den Flächeninhalt  $\Delta/2$ , wobei  $R$  wieder der feste Punkt  $(-1,0)$  ist. Wir verkleinern nun dieses Dreieck auf die Größe  $RKJ$ , wobei  $K$  der Schnittpunkt der Linie  $g(x) = -x$  mit der Linie  $RC$  ist. Da die Dreiecke  $RCM$  und  $RKQ$

ähnlich sind, haben wir  $\frac{H}{1} = \frac{t}{1-t}$ , d.h.  $t = \frac{H}{1+H}$ . Das Verkleinerungsverhältnis vom Dreieck  $RCD$  zum Dreieck  $RKJ$  ist deshalb  $\frac{t}{H} = \frac{1}{1+H}$  und das Flächenverkleinerungsverhältnis  $\frac{1}{(1+H)^2}$ . Damit ist der Flächeninhalt des verkleinerten Dreiecks  $RKJ$  gleich  $\frac{\Delta}{2(1+H)^2}$  und damit genau so groß wie der des zugehörigen Rechtecks  $CDAG$  unter dem Graphen der Funktion  $f$ . Summiert man über dem Intervall  $[0, A]$  auf, sieht man, dass das Integral unter der Funktion  $f$  dem Flächeninhalt des Dreiecks  $RZM$  entspricht, also  $\int_0^A \frac{dx}{2(1+x)^2} = \frac{A}{2(1+A)}$ , wobei hier  $\frac{A}{(1+A)}$  die  $x$ -Koordinate des Punktes  $Z$  ist, also die „Höhe“ des Dreiecks  $RZM$ . Damit haben wir das entsprechende Resultat aus der Integralrechnung mit einfachen geometrischen Mitteln nachvollziehen können. Rein geometrisch kann man sehen, dass das Integral endlich sein muss, weil der Schnittpunkt  $Z$  nie weiter als eine Einheit von der  $y$ -Achse entfernt liegen kann. Damit ist das Integral immer  $\leq 1/2$ . Ähnliche Argumente greifen auch im anfänglichen Beispiel von Aage Bondesen.

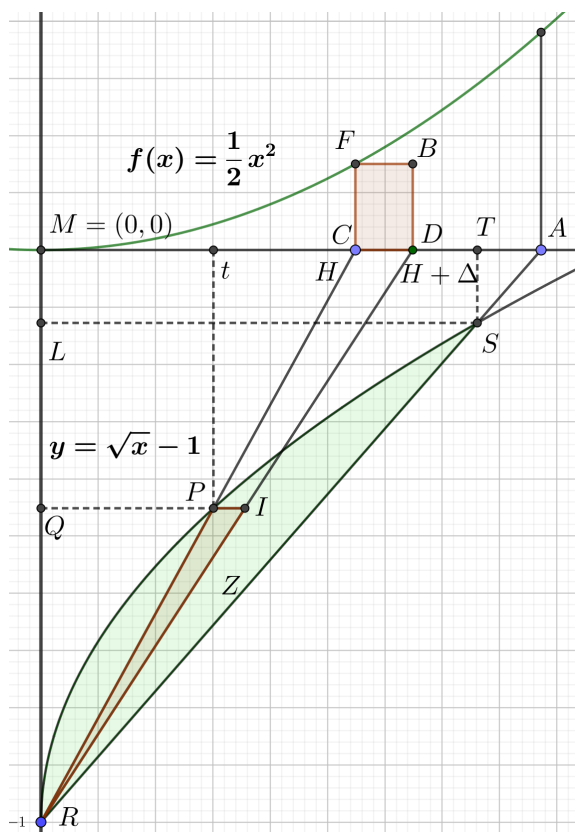


Abb. 3 (GeoGebra)

Im folgenden Beispiel möchten wir die Fläche unter einer Parabel  $y = \frac{x^2}{2}$  bestimmen. Das Riemann-Kästchen  $CDBF$  hat den Flächeninhalt  $\Delta \cdot f(H) = \frac{\Delta H^2}{2}$ . Das Dreieck  $RCD$  dagegen hat wieder den Flächeninhalt  $\Delta/2$ , wobei wieder  $R$  der feste Punkt  $(-1,0)$  ist. Wir verkleinern nun wieder dieses Dreieck auf die Größe  $RPI$ , wobei  $P$  der Schnittpunkt der Funktion  $g(x) = \sqrt{x} - 1$  mit der Linie  $RC$  ist. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $CMR$  und  $PQR$  haben wir  $\frac{H}{1} = t/\sqrt{t}$ , also  $t = H^2$ . Das Verkleinerungsverhältnis vom Dreieck  $RCD$  zum Dreieck  $RPI$  ist deshalb  $\frac{t}{H} = H$  und das

Flächenverkleinerungsverhältnis ist  $H^2$ . Damit ist der Flächeninhalt des verkleinerten Dreiecks  $RPI$  gleich  $\frac{\Delta H^2}{2}$  und damit genau so groß wie der des zugehörigen Rechtecks  $CDFB$  unter der Funktion  $f$ . Summiert man wieder über dem Intervall  $[0, A]$  auf, sieht man, dass das Integral unter dem Graphen der Funktion  $f$  dem Flächeninhalt des teilweise krummlinig begrenzten Flächenstückes zwischen der Wurzelfunktion und der Linie  $RS$ , das dem Querschnitt eines Flugzeugflügels ähnelt, entspricht, also

$$\int_0^A \frac{x^2}{2} dx = Z = \frac{T\sqrt{T}}{2} - \int_0^A x^2 dx$$

Wegen  $RL = \sqrt{T}$  ist nämlich  $\Delta RLQ = \frac{T\sqrt{T}}{2} = \frac{A^3}{2}$ , also  $\frac{3}{2} \int_0^A \frac{x^2}{2} dx = \frac{A^3}{2}$  und damit  $\int_0^A x^2 dx = \frac{A^3}{3}$  und wir haben wieder ein Resultat aus der Integralrechnung bestätigt. Hierbei haben wir auch  $A = \sqrt{T}$  benutzt.

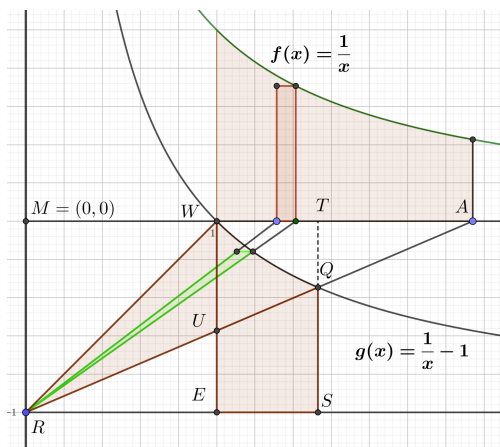


Abb. 4 (GeoGebra)

Mit denselben Argumenten wie oben finden wir, dass die Hyperbel  $y = \frac{1}{x}$  zufälligerweise mit der Hyperbel  $y = \frac{1}{x} - 1$  korrespondiert. Damit erhalten wir, dass der Flächeninhalt unter der Hyperbel  $y = \frac{1}{x}$  über dem Intervall  $[1, A]$  genau doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des teilweise krummlinigen „Dreiecks“  $RQW$ . Nun haben aber die Dreiecke  $REW$  und  $RSQ$  beide

den gleichen Flächeninhalt, nämlich  $\frac{1}{2}$ , sodass auch das Dreieck  $RUW$  und das Trapez  $ESQU$  denselben Flächeninhalt haben. Damit ist  $\int_1^A \frac{dx}{x} = 2 \int_1^T \frac{dx}{x}$  also  $\int_1^{T^2} \frac{dx}{x} = 2 \int_1^T \frac{dx}{x}$ , was ja die logarithmische Eigenschaft des Hyperbelintegrals beschreibt.

Die Fächermethode gibt uns Zugang zu überraschenden Zusammenhängen zwischen einfachen und komplizierten Integralen und kann somit als anschauliches Hilfsmittel bei der Arbeit mit Integration benutzt werden.

## Literatur

Nelson, R. B. (2000). *Proofs Without Words II*, Washington: The Mathematical Association of America.