Peter M. KLÖPPING, Potsdam

„Weil sie alle sehr beispielhaft geschrieben sind, kann ich es einfach nachvollziehen.“

Das Argumentieren, Begründen, Vermuten und Beweisen umfassen einige der grundlegenden Tätigkeiten innerhalb der Mathematik im Sinne einer wissenschaftlichen Disziplin. Gleichwohl schaffen diese mathematischen Tätigkeiten im schulischen Kontext des Fachs eine Basis für das Verstehen und Begreifen mathematischer Ideen. Sie alle beschreiben mathematische Denkweisen und zeigen Möglichkeiten auf, sich mathematischen Problemstellungen und Inhalten zu nähern. Dass in den letzten Jahrzehnten mathematische Denkprozesse immer wieder im Fokus mathematikdidaktischer Forschung standen, unterstreicht die Bedeutsamkeit dieser Tätigkeiten für mathematische Lehr- und Lernprozesse. Jede einzelne dieser Aktivitäten zeigt dabei weite Forschungsfelder auf. So fokussierten im Bereich des Argumentierens im Mathematikunterricht der Grundschule Forschende auf argumentative Aspekte von Unterrichtsinteraktion (Krummheuer, 1995), auf Argumentationskompetenzen von Schülerinnen und Schülern sowie dessen Förderung (Bezold, 2009) oder auf die Begründungskultur im Unterricht in Hinblick auf die konkrete Umsetzung durch die Lehrkräfte (Peterßen, 2012). Neben dem mathematischen Beweis, der Argumentation oder der Begründung an sich (und dem Prozess dorthin) versucht die Forschung im Wesentlichen die Akteure mitsamt ihren Kognitionen und Affekten sowie ihren Handlungen und der Interaktion untereinander zu verstehen und zu erklären.

Eine besondere Rolle nehmen die Lehrkräfte ein, welche sich in Argumentationsprozessen im Unterricht deutlich zeigt. So initiieren in der Regel die Lehrenden Argumentationen im Klassenzimmer (Peterßen, 2012) und steuern zudem, wie die Schülerinnen und Schüler an diesen im Klassenzimmer teilhaben (Forman, Larreamendy-Joerns, Stein & Brown, 1998). Ein Unterricht, in dem Argumentationsanlässe geschaffen werden, wird also von den Lehrkräften verantwortet. Dass dabei das Verständnis der Lehrenden zum mathematischen Argumentieren die Unterrichtsgestaltung und -durchführung maßgeblich beeinflusst, ist anzunehmen (Ayalon & Evan, 2016). Subjektive Theorien der Lehrenden wie ihre Einstellungen zum Lehren und Lernen von mathematischem Argumentieren sollten daher von der Forschung in den Blick genommen werden. Mit Hilfe von leitfadengestützten Interviews wurden angehende Grundschullehrkräfte hierzu befragt. Insbesondere wurde erhoben, nach welchen Kriterien angehende Lehrkräfte mathematische Begründungen von Schülerinnen und Schülern beurteilen.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Begründungen zu mathematischen Aussagen im sozialen Kontext

Betrachtet man zunächst eine mathematische Aussage, deren Gültigkeit noch ungeklärt ist, interessieren aus fachlicher Sicht im Wesentlichen zwei Aspekte. Einerseits möchte man überprüfen, ob diese Aussage überhaupt gilt – man betrachtet dazu den Wahrheitsgehalt. Andererseits wird diskutiert, weshalb die Aussage Gültigkeit besitzt – man fordert inhaltliche Einsicht und ein Verstehen der Aussage. Beide Aspekte werden durch zwei fundamentale Funktionen mathematischer Beweise aufgegriffen: die Bestätigung einer Aussage (*verification*) und die Erklärung hierfür (*explanation*; Hanna, 2000). Entsprechend beschäftigt sich ein mathematischer Beweis in erster Linie mit der Gültigkeit einer Aussage.

In der konkreten Kommunikation über diese Gültigkeit, sowohl im Dialog mit anderen als auch im inneren Monolog mit sich selbst, werden beide Funktionen ergänzt durch die Intention des Überzeugens. Dabei erfolgt die Kommunikation jedoch nicht nur mittels eines mathematischen Beweises im streng-deduktiven Sinn, auch experimentelle Beweise oder inhaltlich-anschauliche Beweise liefern überzeugende Argumente (Wittmann & Müller, 1988). Der Kommunikationsprozess über die Gültigkeit einer mathematischen Aussage lässt sich demnach treffender im mathematischen Argumentieren verorten, da man auch ohne „strengen" Beweis von der Allgemeingültigkeit einer Aussage überzeugt werden kann. Dies zeigt sich insbesondere in Kommunikations- und Argumentationsprozessen, wie sie innerhalb des Unterrichts beobachtet werden können. Da diese Prozesse von der Interaktion der Beteiligten geprägt sind, wird hier die Akzeptanz gültiger Argumente erst ausdiskutiert (Krummheuer, 1995). Streng-deduktive Beweise werden in der Grundschule kaum überzeugen und experimentelle Beweise sollten in der Oberstufe wohl zumindest hinterfragt werden. Die Akzeptanz einer Argumentation, und darin sei die Beweisführung eingeschlossen, und die Überzeugungskraft der genutzten Argumente sind somit vom sozialen Kontext geprägt, von den beteiligten Personen, den Akteuren, die den sozialen Rahmen festlegen. Ob Beweise, Argumente oder Begründungen die Gültigkeit einer mathematischen Aussage überzeugend zeigen, hängt demnach nicht nur von Form, Darstellung, Struktur und Korrektheit ab.

Im sozialen Kontext des Mathematikunterrichts, insbesondere in der Grundschule, werden die sozialen Normen, die zur Akzeptanz oder Ablehnung einer mathematischen Begründung führen, erstmalig ausgehandelt. Da die Lehrkraft hier eine führende Position einnimmt, beeinflussen die Vorstellungen und Einstellungen dieser Lehrperson zum mathematischen Argumentieren und darüber, wie Begründungen zu beurteilen sind, maßgeblich die mathematische Norm im Klassenzimmer.

Erhebung von Beurteilungskriterien für Begründungen

Die mathematische Norm, die sich schließlich in der Überzeugungskraft von Argumenten widerspiegelt, wird sowohl von kognitiven Aspekten wie fachlichem Wissen als auch von affektiven Aspekten wie persönlichen Einstellungen geformt. Eine theoretische Betrachtung von Qualität und Niveau mathematischer Argumente ist für die Überzeugungskraft dieser weniger bedeutend. Daher wurden in einem leitfadengestützten Interview 14 angehende Grundschullehrkräfte zu ihrem Verständnis zum mathematischen Argumentieren befragt. Der Leitfaden wurde aufgrund der Erfahrungen einer vorausgehenden explorativen Studie weiterentwickelt und beinhaltet neben offenen Fragen (z.B. „Welchen Zweck erfüllt Argumentieren in der Mathematik?") einen Teil, in dem über Begründungen von Schülerinnen und Schülern gesprochen wird. Mithilfe eines *Role Construct Repertory Tests* (Kelly, 1955) wurden die Begründungen von den Interviewten eingeschätzt. Der Forschungsfrage angepasst ermöglicht ein *Repertory Grid*, das Verständnis vom mathematischen Argumentieren der Interviewten aufzuzeigen (Klöpping, im Druck). Hierbei werden die *Konstrukte* (Kelly, 1955) verwendet, um Begründungen von Schülerinnen und Schülern durch die Lehrpersonen einzuschätzen und zu beurteilen. In dieser Studie wurden die Kriterien, nach denen die Begründungen beurteilt wurden, in dem klassischen Vorgehen der Betrachtung von Triaden (Kelly, 1955) erhoben. Eine Triade besteht dabei aus drei Begründungen (siehe Abb.) und die Interviewten wurden gefragt, welche Eigenschaft zwei dieser Begründungen gemeinsam haben, die sie von der dritten Begründung abgrenzt oder unterscheidet. Zusätzlich wurden *Konstrukte* (Kriterien) aus dem Interviewteil mit den offenen Fragen abgeleitet.

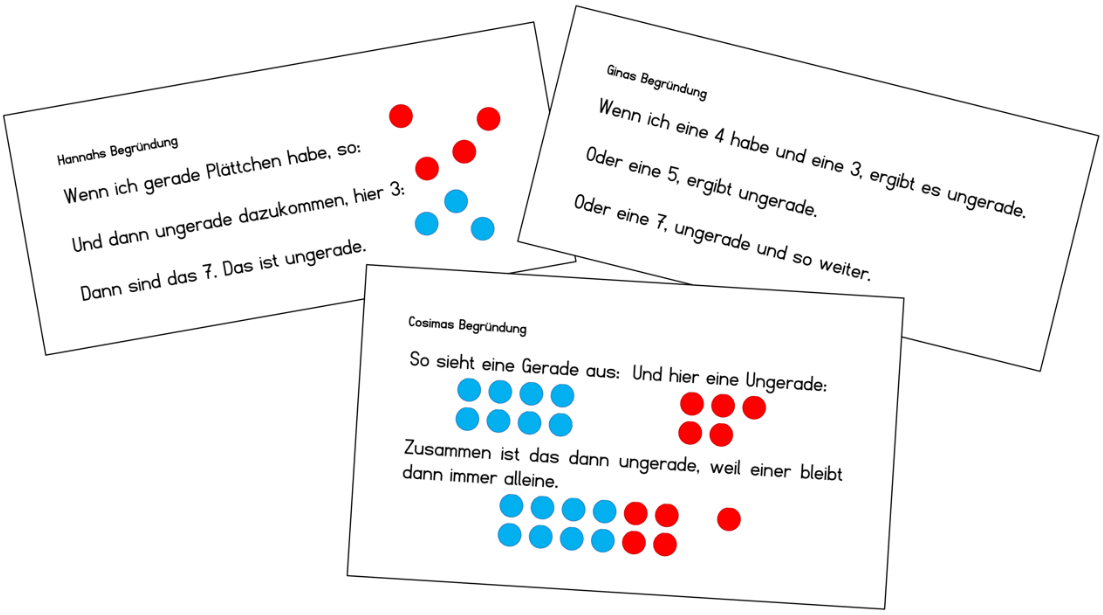

Abb.: Auswahl von Begründungen als Triade

Erste Auswertungen der Beurteilungskriterien

In den ersten Auswertungen wird deutlich, dass das Verständnis zum mathematischen Argumentieren der Interviewten in enger Verbindung zu den Kriterien zur Beurteilung mathematischer Begründungen steht. Auf die Frage, wodurch ein Argument überzeugt, wurde häufig geäußert, dass es nachvollziehbar sein muss. Dieses Kriterium scheint interessant zu sein, da recht unterschiedlich ausfällt, was Nachvollziehbarkeit für die Einzelnen bedeutet. Finja äußert sich bei der Einschätzung der Begründungen wie folgt:

202	Finja:	Weil sie alle sehr beispielhaft geschrieben sind, also in jedem dieser Begründungen steckt mindestens mal […] ein Beispiel drin, das macht es für mich einfach, nachvollziehen.	01:07:27

Für Finja trägt die Beispielnennung zur Nachvollziehbarkeit von Begründungen bei. Im Gegensatz dazu sieht sie Begründungen, die fachliches Vorwissen verlangen. Der Beitrag wird weitere Kriterien zur Einschätzung und Beurteilung von Begründungen diskutieren und wie diese mit dem Verständnis der Interviewten zum mathematischen Argumentieren zusammenhängen.

Literatur

Ayalon, M. & Evan, R. (2016). Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 14(3), 575–601.

Bezold, A. (2009). *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote: Eine Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Dr. Kovač.

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K. & Brown, C. A. (1998). "You're going to want to find out which and prove it": Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction,* 8(6), 527–548.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23.

Kelly, G. A. (1955). *The psychology of personal constructs.* Oxford, England: W.W. Norton.

Klöpping, P. M. (im Druck). *Verständnis von Grundschullehrkräften zum mathematischen Argumentieren – eine forschungsmethodische Ergänzung. Beiträge zum Mathematikunterricht 2019.* Münster: WTM.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Hrsg.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (S. 229–269). Hillsdale, USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Peterßen, K. (2012). *Begründungskultur im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Untersuchung der Lehrer zu ihren Vorstellungen vom Begründen und einer begründungsfördernden Unterrichtsgestaltung*. Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. & Müller, N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.