Julian KÖRTLING, Kassel & Andreas EICHLER, Kassel

Die Entwicklung mathematischer Fachsprache am Beispiel von Definitionen

Der Übergang bzw. die Transition von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik stellt Lernende vor große Herausforderungen und wurde in der mathematikdidaktischen Forschung bereits aus unterschiedlichen Perspektiven untersucht, wodurch Lösungsansätze und Interventionsmaßnahmen entwickelt werden konnten (vgl. u. a. Gueudet, 2008). Nichtsdestotrotz sind die aktuellen Studienabbruchquoten im Fach Mathematik und in mathematikhaltigen Studiengängen weiterhin hoch (Heublein & Schmelzer, 2018), wobei viele Studierende ihr Studium schon während oder nach dem ersten Studienjahr abbrechen.

Als eine Ursache für die Schwierigkeiten von Studienanfängern kann die Sprache der Mathematik angeführt werden. So sehen etwa Reiss und Nagel (2017) die Veränderung von Normen, welche insbesondere die mathematische Sprache betreffen, als eines der großen Probleme beim Übergang ins Mathematikstudium.

Ziel ist es deshalb, den Transitionsprozess von der Sprache im Mathematikunterricht hin zur mathematischen Sprache an der Hochschule genauer zu beschreiben. Dazu soll u. a. den Fragen nachgegangen werden, auf welchen sprachlichen Ebenen sich welche besonderen Schwierigkeiten ergeben und wie sich dies im Verlauf des ersten Studienjahres entwickelt.

Dazu erfolgt zunächst eine kompakte Charakterisierung der mathematischen Sprache, wobei in diesem Beitrag der Fokus auf die mathematischen Definitionen gelegt wird.

Die Sprache der Mathematik

Die Sprache der Mathematik wird in der Literatur generell als vergleichsweise anspruchsvoll eingestuft (Maier & Schweiger, 1999) und es wird häufig eine Unterteilung in Wort-, Satz- und Textebene vorgenommen (vgl. u. a. Meyer & Tiedemann, 2017).

Auf der Wortebene ist zum einen die Verwendung von Symbolen, die als spezielle Lexeme aufgefasst werden können, anzuführen. Zum anderen ist der mathematische Fachwortschatz zu nennen, der eine komplexe Beziehung zur Alltagssprache aufweist (Maier & Schweiger, 1999).

Bezüglich der Satzbildung gibt es Normen und Regeln, wie mathematische Symbole untereinander bzw. mit Wörtern verknüpft werden dürfen, um so

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

mathematische Zusammenhänge präzise und verallgemeinert auszudrücken. Neben Definitionen, auf die im Folgenden genauer eingegangen wird, lassen sich noch die mathematischen Aussagen, d. h. Ausdrücke, für die nach einer zweiwertigen Logik eine Entscheidung darüber gefällt werden kann, ob sie wahr sind oder nicht, als wichtiges Element der mathematischen Sprache auf der Satzebene verorten (Maier, 2004).

Mathematische Sätze bestehen häufig aus mehr als einem Satz im linguistischen Sinne und werden deshalb in Anlehnung an Meyer und Tiedemann (2017) auf der Textebene verortet, ebenso wie ihre Beweise. Darüber hinaus können noch allgemeine Merkmale mathematischer Texte herausgestellt werden (vgl. u. a. Maier & Schweiger, 1999).

Mathematische Definitionen

Auf der Satzebene sind insbesondere die mathematischen Definitionen hervorzuheben. Definitionen haben eine fundamentale Bedeutung für den mathematischen Sprachgebrauch und die Mathematik im Allgemeinen. Sie stellen nicht nur den Ausgangspunkt für weitere mathematische Überlegungen zu den definierten Objekten dar, sondern ermöglichen es überhaupt erst, diese Objekte zu erfassen (Alcock & Simpson, 2002). Wörter werden „erst durch ihre definitorische Festlegung auf der Satzebene zu mathematischen Begriffen und damit zu möglichen Hilfsmitteln des mathematischen Arbeitens“ (Meyer & Tiedemann, 2017, S. 24). Mathematische Fachbegriffe bauen aufeinander auf, sodass in der Definition eines neuen Begriffs i. d. R. nur bereits zuvor definierte Begriffe gebraucht werden. Dabei umfassen sie nicht mehr Eigenschaften, als für die Beschreibung der zu definierenden Objekte oder Beziehungen zwingend notwendig sind (Maier, 2004). Grammatikalisch sind mathematische Definitionen zumeist so aufgebaut, dass im konditionalen Nebensatz das Definierende (Definiens) dargestellt ist und im Hauptsatz der zu bestimmende Begriff (Definiendum) beschrieben wird (Meyer & Tiedemann, 2017). Das Definiendum darf dabei selbstverständlich nicht im Definiens vorkommen.

Definition des Funktionsbegriffs

Der Funktionsbegriff ist den Studierenden hinlänglich aus der Schule bekannt. In gängigen Schulbüchern für das Gymnasium in Hessen wird er i. d. R. unter Verwendung des Zuordnungsbegriffs definiert. Eine Funktion wird als Zuordnung beschrieben, die jedem x-Wert genau einen y-Wert zuordnet. In Schulbüchern für die gymnasiale Oberstufe werden dabei auch die Begriffe Definitionsmenge und Wertemenge verwendet: „Eine Zuordnung, die jedem Element einer Definitionsmenge genau ein Element der Wertemenge zuordnet, nennt man Funktion.“ (Lambacher Schweizer, 2012, S. 34).

In Lehrbüchern erfolgt die Definition zum einen häufig über den Relationsbegriff, zum anderen über den Abbildungsbegriff. Dabei wird eine Funktion entweder als Abbildung definiert, deren Wertevorrat aus Zahlen besteht („Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen (reellen) Funktion auf D versteht man eine Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$." (Forster, 2016)), oder die beiden Begriffe werden synonym verwendet, wie es in der Erstsemesterveranstaltung Grundlagen der Mathematik im WS 2018/19 an der Universität Kassel der Fall war: „Seien A, B nichtleere Mengen. Eine Abbildung oder Funktion $f: A \to B$ ordnet jedem $a \in A$ genau ein $b = f(a)$ zu. Dabei wird A als Definitionsbereich und B als Zielmenge (auch Bildbereich oder Wertevorrat) bezeichnet".

Vergleicht man die schulischen Definitionen mit denen aus universitären Lehrveranstaltungen und Lehrbüchern, liegen die wesentlichen Unterschiede im generellen Zugang zum Begriff und im Grad des Formalismus. Zudem fällt auf, dass für die Fachbegriffe Definitionsbereich und Wertevorrat viele synonyme Begriffe genutzt werden.

Methode

Ausgehend von der zuvor skizzierten Charakterisierung der mathematischen Fachsprache und der Analyse der Vorlesungsskripte der Erstsemesterveranstaltungen in den Studiengängen Mathematik Bachelor und gymnasiales Lehramt Mathematik an der Universität Kassel wurden Interviewleitfäden entwickelt, die neben Fragen auch Prompts in Form von kurzen Aufgaben oder Schreibaufträgen enthalten. Für eine erste Erhebung konnte eine Stichprobe von elf Erstsemesterstudierenden der genannten Studiengänge gewonnen werden, mit denen zu je vier Zeitpunkten im Wintersemester 2018/19 (Beginn der Lehrveranstaltungszeit, nach vier Wochen, nach acht Wochen und am Ende der Lehrveranstaltungszeit) Interviews geführt wurden, um den Entwicklungsverlauf bezüglich der mathematischen Sprache bei den Teilnehmern zu erfassen.

Erste Ergebnisse

Eine der Aufgaben in den Interviews bestand darin, den Begriff Funktion zu definieren. Im ersten Interview definierte die Hälfte der Teilnehmenden eine Funktion als Zuordnung von x-Werten zu y-Werten, wobei bis auf einen Fall der Aspekt der Eindeutigkeit der Zuordnung nicht erwähnt wurde. Vier Teilnehmende beschrieben eine Funktion als geometrisches Objekt über den Funktionsgraphen. In drei Fällen wurden dabei lediglich konkrete Beispiele aufgeführt. Zum dritten Interviewzeitpunkt, eine Woche, nachdem der Funktionsbegriff in der Vorlesung eingeführt worden ist, nutzte weiterhin die

Hälfte der Teilnehmenden den Zuordnungsbegriff in ihrer Definition. Anstelle von x- und y-Werten wurde in den meisten Fällen jedoch der Mengenbegriff angewandt. Generell war bei den meisten Teilnehmenden der Versuch zu erkennen, den Begriff möglichst allgemein und abstrakt zu beschreiben, was in einigen Fällen aber auch zu unpräzisen oder falschen Definitionen führte. Im Interview am Semesterende definierten nur noch zwei Studierende eine Funktion über den Begriff der Zuordnung. Stattdessen verwendeten sieben Studierende den Abbildungsbegriff. Wichtige Voraussetzungen wurden vermehrt explizit angeführt und die korrekten Fachbegriffe verwendet (Definitionsbereich, Wertevorrat). Nichtsdestotrotz konnten die meisten auch zum vierten Zeitpunkt keine vollständige, präzise Definition formulieren, da der Aspekt der Eindeutigkeit nicht benannt wurde. Lediglich einem Teilnehmenden gelang es in den letzten beiden Interviews, eine korrekte und vollständige Definition des Funktionsbegriffs anzugeben. Diese Tendenz zeigte sich auch bei anderen Begriffen, die in den Interviews definiert werden sollten. Fachbegriffe inhaltlich und sprachlich korrekt zu definieren stellte die Studierenden auch am Ende des ersten Semesters noch vor große Herausforderungen, woraus wiederum weitere Schwierigkeiten u. a. beim Erlernen neuer Begriffe resultieren können.

Literatur

Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics,* 22(2), 28-34.

Forster, O. (2016). *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. Wiesbaden:* Springer Spektrum.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics,* 67(3), 237-254.

Heublein, U. & Schmelzer, R. (2018). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Berechnungen auf Basis des Absolventenjahrgangs 2016.* DZHW-Projektbericht.
https://idw-online.de/en/attachmentdata66127.pdf (19.12.2019)

Lambacher Schweizer (2012). *Mathematik: Analysis Leistungskurs.* Stuttgart: Klett

Maier, H. (2004). Zu fachsprachlicher Hyper- und Hypotrophie im Fach Mathematik oder Wie viel Fachsprache brauchen Schüler im Mathematikunterricht? *Journal für Mathematik-Didaktik,* 25(2), 153-166.

Maier, H.& Schweiger, F. (1999). *Mathematik und Sprache: Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht.* Wien: öbv & hpt.

Meyer, M. & Tiedemann, K. (2017). *Sprache im Fach Mathematik* (Mathematik im Fokus). Berlin: Springer Spektrum.

Reiss, K. & Nagel, K. (2017). From high school to university mathematics: The change of norms. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline: Conference Proceedings*. khdm report 17-05 (S. 444-447). Kassel.