Jörg KORTEMEYER, Clausthal-Zellerfeld

Verwendung von Mathematik in einem MINT-Anwendungsfach im Übergang Schule/Hochschule

Der Vortrag stellt Ergebnisse meiner Dissertation zu mathematischen Kompetenzen in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenfächern aus dem BMBF-geförderten Projekt KoM@ING vor. Der Fokus liegt auf den „Grundlagen der Elektrotechnik“ (GET), welche Elektrotechnik-Studierende in den ersten beiden Semestern parallel zu der „Mathematik für Ingenieure“ (MfI) belegen. Daraus ergeben sich Herausforderungen wie u. a., dass mathematische Resultate teilweise in den Ingenieur-Grundlagenfächern früher benötigt werden als sie in den Mathematikveranstaltungen behandelt werden. Zudem existieren auch unterschiedliche mathematische Praktiken in MfI und GET, wie Alpers (2018) bspw. am Begriff der Stetigkeit erläutert.

In diesem Beitrag werden die Forschungsfragen beantwortet, wie Lösungsprozesse und -produkte normativ beschrieben werden können sowie welche Unterschiede es zu in Videostudien erhobenen Lösungsprozessen von Studierendenpaaren gibt. Als Beispiel dient eine Aufgabe zur Berechnung verschiedener Spannungswerte unter Verwendung von Mittelwertbegriffen aus der Integralrechnung, welche nach einem Kurzüberblick über die Methodologie der Untersuchungen näher vorgestellt wird.

Vorgehensweise in den Analysen

Zur Analyse der in den Studien verwendeten vier Aufgaben aus einer Elektrotechnik-Klausur wurden ausgehend von Kurzlösungen, die teilweise nur Endergebnisse enthielten, vier Typen von Studien durchgeführt:

- Experteninterviews (n=4) unter Verwendung der PARI-Methodik, vgl. Hall et al. (1995), zum Erhalt einer ausführlichen Lösung, zur Ermittlung der impliziten und expliziten Kompetenzerwartungen der Lehrenden in der Elektrotechnik sowie zu typischen Fehlern und Alternativwegen.
- Normative Lösungen, welche einerseits auf theoretischen Ansätzen wie dem Modellierungskreislauf (Blum & Leiß, 2007), mathematischem Problemlösen und Heuristiken (Polya, 1949) und Arbeiten zur Mathematikverwendung aus der Physikdidaktik (Bing, 2008) sowie andererseits auf den Ergebnissen der Experteninterviews beruhen.
- Videostudien mit Studierendenpaaren (n=15), die zum lauten Denken aufgefordert wurden, zur Ermittlung von Unterschieden zu den normativen Lösungen sowie zur Beschreibung typischer Strategien.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

- Klausurbearbeitungen (n=92) zur Bestätigung, Verfeinerung und Erweiterung der Ergebnisse aus den übrigen Studien.

Vorstellung der Aufgabe inkl. einer Kurzlösung

Aufgabe C: An einer Spule L=100 mH liege für eine Dauer von T=10s die im Bild dargestellte Spannung u_L(t) an. Zum Zeitpunkt t=0s fließe durch die Spule kein Strom i_L(t=0)=0A.

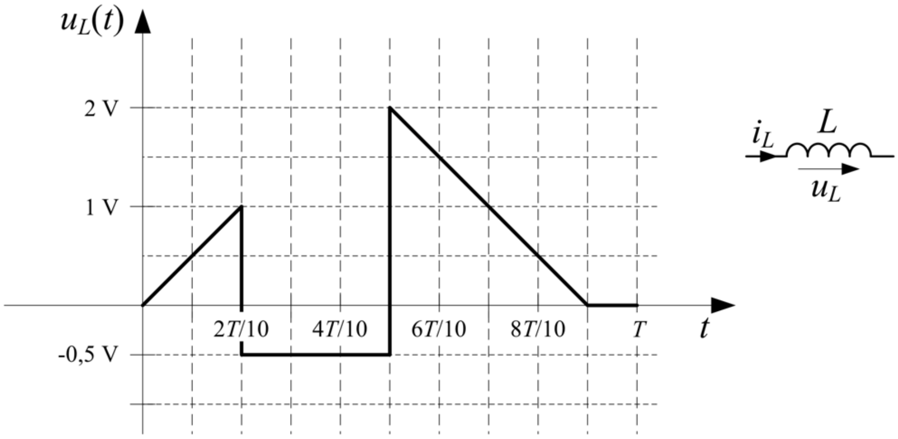

Abb. 1: Darstellung des Spannungsverlaufs

Es gibt vier Aufgabenteile, von denen die ersten drei hier vorgestellt werden:

(C1) Geben Sie den arithmetischen Mittelwert der Spannung im Intervall [0,T] an. Lösung: *0,35*V, was sich entweder über das Integral einer in vier Abschnitten definierten Funktion zur Berechnung der Flächenbilanz oder durch die Summation der orientierten Flächen ergibt. **(C2)** Berechnen Sie den Effektivwert der Spannung im Intervall. Lösung: Den Effektivwert *0,82*V erhält man als quadratischen Mittelwert:

$$U_L = \sqrt{\frac{1}{10\mathsf{s}}\left(\int_0^{2\mathsf{s}}\left(\frac{1\mathsf{V}}{2\mathsf{s}}\cdot t\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{2\mathsf{s}}^{5\mathsf{s}}(-0,5\mathsf{V})^2\mathrm{d}t + \int_{5\mathsf{s}}^{9\mathsf{s}}\left(\frac{-2V}{4\mathsf{s}}\cdot t + 2V\right)^2 \mathrm{d}t\right)} = 0,82\mathsf{V}$$

Abb. 2: Berechnung des Effektivwerts

(C3) Berechnen Sie den Gleichrichtwert der Spannung im Intervall. Lösung: *0,65*V, was sich als Integral einer in vier Abschnitten definierten Funktion zur Berechnung der Fläche oder aus der reinen Addition der drei nicht-orientierten Flächen ergibt.

Normative Beschreibung der Kompetenzen in der Lösung

Die Lösungsprozesse können allgemein in drei Phasen gegliedert werden:

- In der *Mathematisierung* werden konventionalisierte Skizzen verwendet, um Gleichungen für die Berechnungsteile der Aufgabe aufzustellen.

- Das *mathematisch-elektrotechnische Arbeiten* beinhaltet die Arbeit mit solchen Gleichungen unter Verwendung von Größen, d. h. Zahlen mit Einheiten, sowie spezielle Umformtechniken bei diesen Gleichungen.
- Unter *Validierung* sind Überprüfungsstrategien zu verstehen, die z. B. die Überprüfung von Einheiten oder Größenordnungen einschließen.

Die Mathematisierung ist bei der vorliegenden Aufgabe vergleichsweise einfach, da bereits ein Graph der zu betrachtenden Funktion gegeben ist und in allen drei Aufgabenteilen die jeweils entsprechenden Formeln abgerufen werden müssen. Laut Aussage des Experten können in C1 zur Lösung auch „Kästchen verschoben werden", was sich auf die Translationsinvarianz der Flächen bezieht und so beispielsweise eine Berechnung von Rechtecken anstatt von Dreiecken ermöglicht. Im mathematisch-elektrotechnischen Arbeiten spielt die Strategie des Einheitenmanagements eine zentrale Rolle. Hierunter ist der Umgang mit dem SI-Einheitensystem sowie von Umformstrategien und -techniken der Größenalgebra zu verstehen. Im Gegensatz zu anderen Aufgaben treten hier keine Kombinationen von SI-Basiseinheiten auf, die passend zu einer Zieleinheit kombiniert werden müssen, z. B. für die Induktivität der Spule die Einheit Henry, wobei ein H=(kg*m^2)/(A^2*s^2), also Henry=(Kilogramm*Meter^2)/(Ampere^2*Sekunde^2), gilt.

Durch die in den drei Aufgabenteilen gesuchten Spannungen ist klar, dass die Lösung die Einheit Volt haben muss und sich daher in C1 und C3 die Einheit Sekunde kürzen muss bzw. in C2 im Vorgang zwischen Quadrieren, Integration und Radizieren nur die Einheit Volt (und nicht Volt^2 bzw. Kombinationen mit Sekunde) übrigbleiben darf. Auch die Größenordnung kann abgeschätzt werden, da das arithmetische Mittel der Spannung aus C1 (bzw. die Flächenbilanz zwischen x-Achse und Graph) immer kleiner als der Gleichrichtwert aus C3 (bzw. die Fläche zwischen x-Achse und Graph) ist.

Einblicke in die Studierendenlösungen

Die Aufgabe wurden drei Elektrotechnik-Studierendenpaaren vorgelegt, die während ihres Bearbeitungsprozesses gefilmt wurden. In diesem Abschnitt wird exemplarisch vorgestellt, welche Strategien ein oder mehrere Paare angewendet haben. In C1 wurde das bereits erwähnte „Kästchenzählen" verwendet, wobei dennoch zusätzlich die Einheiten betrachtet werden:

> „Vier Sekunden. So, wenn man das jetzt ausrechnet, 1 minus 1,5 sind wir bei 0,5 plus 4, sind wir bei 3,5/10. 3,5/10 Volt. Das Sekunde kürzt sich, Volt nicht."

Ein weiterer zentraler Punkt in den Bearbeitungsprozessen ist die notwendige Zerlegung des Integrationsintervalls. In C2 zeigen sich die deutlichsten

Unterschiede zwischen den Paaren: Während ein Paar Fehler bei der Umformung der Wurzel macht, setzt ein anderes folgende Umstrukturierung ein:

$$x = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^a \ldots\ \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^b \ldots\ \mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_0^c \ldots\ \mathrm{d}t}$$
$$\Leftrightarrow T x^2 = \int_0^a \ldots\ \mathrm{d}t + \int_0^b \ldots\ \mathrm{d}t + \int_0^c \ldots\ \mathrm{d}t$$

Abb. 3: Umstrukturierung der Formel zur besseren Organisation

Diese ermöglicht es, den gesuchten Wert x korrekt zu berechnen, ohne häufige Fehler bspw. durch falsche Umformungen der Wurzel durchzuführen oder Ergebnisse zwischenspeichern zu müssen. In C3 wird von allen Gruppen die Rechnung aus C1 entsprechend verändert. Eine Gruppe ergänzt:

> „Ist es denn hoffentlich größer als in Aufgabe C1? Das ist löblich. Es wäre nämlich falsch, wenn’s kleiner wäre.“

Weiterführendes

Weitere Ergebnisse der Untersuchungen zu dieser Aufgabe wie auch den genannten drei weiteren Klausuraufgaben, u. a. zu Schwingkreisen (unter Verwendung von Gewöhnlichen Differentialgleichungen), werden in meiner Dissertation Kortemeyer (2019) näher vorgestellt.

Literatur

Alpers, B. (2018). Unterschiedliche Sichtweisen von Mathematikern und Maschinenbauingenieuren auf die Mathematik am Beispiel der Stetigkeit. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 145-148). 3. Gemeinsame Jahrestagung der DMV und der GDM, Paderborn. Münster: WTM.

Bing, T. J. (2008). *An epistemic framing analysis of upper level physics students’ use of mathematics.* Dissertation, University of Maryland, Baltimore.

Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Haines, C., Galbraith, P., Blum, W. & Khan, S. (Hrsg.), *Mathematical modelling: Education, engineering, and economics* (S. 222–231, Chichester. Horwood.

Hall, E. P., Gott, S. P. & Pokorny, R. A. (1995). *A procedural guide to cognitive task analysis: The PARI Methodology* (No. AL/HR-TR-1995-0108). http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a303654.pdf. Armstrong Lab Brooks AFB TX Human Resources Directorate.

Kortemeyer, J. (2019). *Mathematische Kompetenzen in ingenieurwissenschaftlichen Grundlagenveranstaltungen.* Wiesbaden, Deutschland: Springer-Spektrum

Polya, G. (1949). *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.