Nino LIBERTO, Hannover & Thomas GAWLICK, Hannover

Scaffolding-Effekte beim Lösen verwandter Problemaufgaben

Die besten Lernenden sind nach Collins et al. diejenigen, die in Abhängigkeit eines aktiven, durch das selbstinitiierte Durchlaufen eines inneren Fragenkatalogs gekennzeichneten, Verstehensprozesses ein tieferes Verständnis als passiv Lernende erwerben (1989, S. 459). Indes kommt niemand von Natur aus mit diesen Fähigkeiten auf die Welt. Und gerade wenn Schülerinnen und Schüler (SuS) mit dem üblichen Präsentieren eines Lösungswegs vom Start zum Ziel konfrontiert werden, laufen sie Gefahr, folgendem Irrglauben zu verfallen: Verläuft eine *Beweisdarstellung* vorwärts, suggeriert dies, dass sämtliche Aufgaben im Mathematikunterricht durch alleiniges Vorwärtsarbeiten erfolgreich bewältigt werden könnten. Tatsächlich verläuft die *Beweisfindung* oft anders und gerade bei Problemaufgaben ist es der Fall, dass sich die Strategie des kombinierten Vorwärts- und Rückwärtsarbeitens vorteilhafter als reines Vorwärtsarbeiten erweist, vgl. Welzel & Gawlick (in diesem Band). Um dem entgegenzuwirken, bieten Collins et al. die Methode des *Cognitive Apprenticeship*, die den Übergang vom passiven zum aktiven Lerner durch Erlernen von Strategien fördert. Wir zeigen, wie einem Teilnehmer unseres Problemlösetrainings LeduPro das Erlernen des Transformationsprinzips mit dieser Methode gelungen ist.

Das Trainingskonzept von LeduPro

Im Zentrum des Projekts, bei dem die Teilnehmenden vom *Lernen durch Problemlösen* profitieren sollen, steht eine Reihe Problemaufgaben, die sich in **zwei Erhebungs- (E2, E3) und vier Trainingsaufgaben (T1–T4)** unterteilt. Die Wirksamkeit des dazugehörigen heuristischen Trainingskonzepts soll durch Anwendung in verschiedenen Settings überprüft werden. Einerseits wurden die Aufgaben von Trainingsklassen über einen Zeitraum von sechs Wochen im regulären Unterricht individuell bearbeitet und nicht besprochen oder korrigiert, aber mit heuristischen Rückmeldungen versehen, während Vergleichsklassen nur die Aufgaben E2 und E3 bearbeiteten. Bereits Schoenfeld (1979) beschreibt, wie viel größer der Erfolg eines heuristischen Trainings wird, bei dem Problemlösestrategien *explizit* vermittelt werden. Aus diesem Grund wurden einige Probanden eingeladen, an einem Training teilzunehmen, das sich ähnlich zu Schoenfelds Studie in die folgenden drei Phasen gliedert: 1) Bearbeitung mit Lautem Denken, 2) Individuelle Rückschau mit heuristischen Interventionen und **3) Gemeinsame Rückschau in einer Gruppe**. Ausführliche Informationen zu den Aufgaben oder Beschreibungen der Trainingskomponenten können unter

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

https://www.idmp.uni-hannover.de/LeduPro abgerufen werden. Für die nachfolgenden Kapitel gestaltet sich die Gruppenrückschau entscheidend, in der Lösungsfindung und -wege im Plenum besprochen werden. Gerade das Rekonstruieren eines bereits ausgeführten Lösungswegs und Abwägen von Alternativen kann sich nach Gawlick & Liberto (2017) positiv auf nachfolgende Bearbeitungen weiterer Aufgaben auswirken. Im Hintergrund der gemeinsamen Rückschau steht die Methode des **Cognitive Apprenticeship**, bei der Lehrende die zu erwerbenden Fertigkeiten zunächst vorführen und Lernende diese schrittweise übernehmen sollen. Da hier der Fokus v.a. auf Denkprozessen liegt „erfordert dies eine Externalisierung der mentalen Prozesse durch begleitendes Verbalisieren [bei denen der Lehrende] zeigt, wie er lernstrategisch vorgeht (Hasselhorn & Gold, 2006, S. 298). Im Allgemeinen kann bei einer solchen Rekonstruktion zunächst vorwärts gearbeitet werden (VA), bis heuristische Impulse benötigt oder die Arbeitsrichtung gewechselt werden muss (RA), um weitere Schritte zu generieren. Im ersten Fall können Probanden versuchen, sich an die heuristischen Interventionen aus Phase 2 zu erinnern und diese anzuwenden – im zweiten Fall werden sie an die Strategie des kombinierten VA/RA herangeführt.

Verwandte Aufgaben und charakteristische Barrierestellen

Beim Konzipieren der geometrischen Bestimmungsaufgaben für LeduPro ist aus einem Vorrat mathematischer Lehrsätze (u.a. Thales (T), Innenwinkelsumme in Start- (I) oder Zieldreieck (J) und Satz vom Inkreis (A)) geschöpft worden, aus denen zum Lösen der Aufgaben jeweils eine Auswahl auf bisher ungewohnte Weise verknüpft werden müssen. Insgesamt liegt das Augenmerk also gerade auf der Strukturierung *verwandter* Problemräume. Einen Überblick der charakteristischen Barrierestellen der nachfolgend beschriebenen Aufgaben bietet Tab. 1, wobei mit Startperspektive der (ohne Kenntnis der Lösung) erreichbare Zustand durch alleiniges VA und mit Zielperspektive analog der durch alleiniges RA bezeichnet wird, zwischen denen nicht ohne weiteres überbrückt werden kann.

	Startperspektive	Zielperspektive	Lösung
E2	(I,T): $\alpha + \beta = 90°$	(J, A): $\mu = 180° - ½(\alpha + \beta)$	$\mu = 135°$
T4c	(I, V): $4\alpha + \gamma = 180°$	(J, V, A): $\mu = 180° - 2\alpha$	$\mu = 90° - ½\gamma$
E3	(N, V1, V2): $\beta + 2\delta = 90°$	(J, A): $\gamma = 180° - (½\beta + \delta)$	$\gamma = 135°$

Tab. 1: Überblick charakteristischer Barrierestellen der Aufgaben E2, T4c und E3

Für die Eingangsaufgabe E2 (das TIMSS-Item K10) wurde bereits gezeigt, dass die charakteristische Barriere während der Planungsphase erscheint, wenn Bearbeitende beabsichtigen, den Zielwinkel μ über J zu berechnen, indem sie die fehlenden Winkel *einzeln* bestimmen wollen (Gawlick &

Lucyga, 2015). Diese sind jedoch variabel, sodass sich die Lösung nur durch Substitution (mit dem Operator ∧ bezeichnet) ihrer konstanten Summe finden lässt. Hierbei kommt das **Transformationsprinzip** zur Anwendung: Solche Termumformungen kennen die SuS aus der Gleichungslehre, aber nicht aus der Geometrie. Eine ähnliche Barriere besteht auch in der abschließenden Aufgabe E3 und der Trainingsaufgabe T4c – bei ihr handelt es sich um eine Variante von E2, die anstelle der Thales-Bedingung die Voraussetzung, der Winkel β sei dreimal so groß wie α, beinhaltet. Mit mindestens vier notwendigen Operatoren und aufgabenspezifischen Voraussetzungen (V) gehören die drei zu den umfangreichsten gestellten Aufgaben, zumal der Innenwinkelsummensatz in Teildreiecken auch iteriert anwendbar ist. Daraus resultiert die Erwartung eines großen Problemraums mit vielseitigen Lösungswegen. Die Auswertung der E3-Bearbeitung von Probanden einer Trainings- und einer Vergleichsklasse (S8a/S8d, n=53) zeigt, dass sich ihre Ansätze entgegen dieser Erwartungen innerhalb weniger Lösungswege verorten lassen und so die Größe des Problemraums erheblich reduziert wird, vgl. Abb. 1. Daraus erhellt auch, dass eine solche Barriere ebenfalls in E3 auftritt und SuS versuchen, diese auf illegalem Wege zu *umgehen*, z.B. durch Messen der Größen von β und φ.

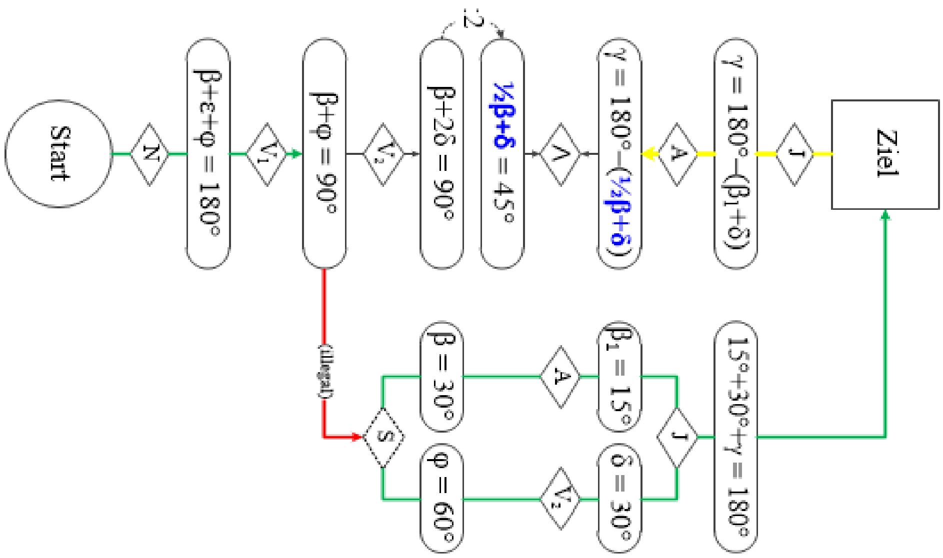

Abb. 1: Reduzierter Problemraum bei E3 (VA=grün, RA=gelb, rot = illegal)

Akquirieren des Transformationsprinzips während einer Rückschau

Gawlick & Welzel (2017) beschreiben wie das *Überwinden* dieses Barrieretyps durch geschickten Wechsel der Arbeitsrichtung gelingen kann. Ein Beispiel für solch einen Problemlöseprozess findet sich in der Gruppenrückschau zu T4c. Der Proband L04 gibt das Transformationsprinzip implizit vor, indem er L01 die Gleichungen der Start- und Zielperspektive (vgl. Tab. 1) vorstellt und ihn dazu anhält, über das algebraische Kombinieren beider

Gleichungen eine Antwort für die Aufgabenstellung zu liefern. L01 greift den Vorschlag sofort auf, die Umsetzung stellt ihn jedoch vor Probleme, sodass er mehrere Minuten verschiedene Termumformungen anwendet, bis es ihm gelingt, damit die Aufgabe zu lösen. Die Anwendung des Transformationsprinzips gestaltet sich hierbei leichter als bei den Erhebungsaufgaben, da schon die etwas einfachere Substitution von $2\alpha = 90° - ½\gamma$ in die Gleichung $\mu = 180° - 2\alpha$ genügt. Die ihm durch das o.a. Scaffolding von L01 eröffnete Lösungsmöglichkeit greift L01 in der darauffolgenden Einzelbearbeitung von E3 auf: Als er wieder in die Barrieresituation gerät, gelingt ihm nach einigem Probieren nun das anspruchsvollere Einsetzen der Gleichung $½\beta + \delta = 45°$ in $\gamma = 180° - (½\beta + \delta)$.

Zuvor fanden wir nur den Fall, dass der *Erklärende* Vorteile aus der gemeinsamen Rückschau zieht: „Für beide Probanden fand hier die extern initiierte Rückschau zwecks Erklärung für die Mitschüler statt, diesmal führt sie aber bei K04 (und nur bei ihm!) zu dem Ergebnis, dass die Folgeaufgabe K10 mit Leichtigkeit [und] ohne Hilfestellung […] gelöst werden konnte“ (Gawlick & Liberto, 2017, S. 105f). Der Fall der gemeinsamen Rückschau von L01 und L04 zeigt, dass es auch dem *Lernenden* möglich ist, eine Lösungsstrategie für nachfolgende Bearbeitungen zu akquirieren, wie es beim Cognitive Apprenticeship eigentlich intendiert ist.

Literatur

Collins, A., Brown, J. S. & Newman, S.E. (1989). Cognitive apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics. In L. B. Resnick (Hrsg.), *Knowing, Learning and Instruction. Essays in the Honor of Robert Glaser.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gawlick, Th. & Lucyga, E. (2015). Analyse von Problemlöseprozessen mit Hilfe von Lösungsgraphen und verfeinerten Pólya-Phasen. In A. Kuzle & B. Rott (Hrsg.), *Problemlösen gestalten und beforschen – Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen 2014*. Münster: WTM.

Gawlick, Th. & Liberto, N. (2017). Lernen durch Problemlösen und mit Lösungsbeispielen. In B. Rott, A. Kuzle & R. Bruder (Hrsg.), *Problemlösen unterrichten und untersuchen. Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Darmstadt 2017* (S. 81–107). Münster: WTM.

Gawlick, Th. & Welzel, G. (2018). Backwards or Forwards? Direction of Working and Success in Problem Solving. In A. Kuzle et al. (Hrsg.): *Implementation Research on Problem Solving in School Settings. Proceedings of the 2018 Conference of ProMath and the GDM Working Group on Problem Solving* (S. 71–90). Münster: WTM.

Hasselhorn, M. & Gold, A. (2006). *Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren*. Stuttgart: Kohlhammer.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit Heuristic Training as a Variable in Problem-Solving Performance. National Council of Teachers of Mathematics (Hrsg.), *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 173–187.