

Edith LINDENBAUER, Linz & Sandra REICHENBERGER, Linz

Voronoi-Diagramme im Unterricht mit GeoGebra und 3D-Druck

Einleitung

In Österreich sind Voronoi-Diagramme nicht Bestandteil des Lehrplans und werden daher in der Regel nicht im Unterricht diskutiert. Dieses Thema bietet jedoch eine Reihe verschiedener Möglichkeiten für den Mathematikunterricht, zumal die mathematischen Grundkenntnisse von Voronoi-Diagrammen Teil des Lehrplans der Sekundarstufe I sind. Deshalb haben wir eine Unterrichtssequenz zu diesem Thema mit mehreren realen Anwendungen einschließlich interaktiver GeoGebra-Materialien und 3D-Druck entworfen.

Aus didaktischer Perspektive umfassen die in diesem Artikel diskutierten Aufgaben sowohl Modellierungs- als auch Anwendungsaspekte. Nach Kaiser, Blum, Borromeo Ferri und Greefrath (2015) versteht man darunter alle Aspekte der Beziehung zwischen Realität und Mathematik, wobei Anwendungen eher die Beziehung von Mathematik zur Realität betrachtet und Modellierung die Richtung von Realität zur Mathematik anspricht.

Mathematischer Hintergrund

Im 19. Jahrhundert untersuchten Voronoi und Dirichlet erstmals Voronoi-Diagramme (Rousseau & Saint-Aubin, 2012). Voronoi-Diagramme können in verschiedenen Zusammenhängen verwendet werden, beispielsweise in der Stadtplanung (z. B. zur Lösung von Standortproblemen), in der Biologie, Chemie, Physik, Klimaforschung und Wirtschaft (Baudson & Klein, 2006). Strukturen, die Voronoi-Diagrammen ähneln, gibt es auch in der Natur: Die Adern in Libellenflügeln bilden (fast) ein Voronoi-Diagramm. Dies ist wahrscheinlich hilfreich, um die Nährstoffversorgung oder die Elastizität zu optimieren (Glaeser, 2011). Schließlich kann dieses geometrische Muster auf kreative Weise genutzt werden, beispielsweise für Anwendungen in den Bereichen Kunst, Möbeldesign, Schmuck und Architektur (Calonge & Yagüe, 2016).

Sei $S = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ eine endliche Menge von Punkten in \mathbb{R}^2 . Die Punkte P_i werden Voronoi-Zentren (oder -Punkte) genannt. Für jeden Punkt P_i ist die Voronoi-Region (oder Voronoi-Zelle) von P_i , die wir mit $V(P_i)$ bezeichnen, die Menge der Punkte von \mathbb{R}^2 , die näher an P_i liegen als an jedem anderen Punkt P_j (oder höchstens den gleichen Abstand haben):

$$V(P_i) = \{Q \in \mathbb{R}^2, |P_i Q| \leq |P_j Q|, j \neq i\}$$

Die Aufteilung von \mathbb{R}^2 in Voronoi-Regionen wird als Voronoi-Diagramm von S bezeichnet und mit $V(S)$ bezeichnet. In \mathbb{R}^2 ist jede Voronoi-Region ein konvexes Polygon (Rousseau & Saint-Aubin, 2012). Die umgekehrte Frage, wie eine konvexe Partition der Ebene durch Bestimmen der Voronoi-Zentren in ein Voronoi-Diagramm umgewandelt werden kann, erweist sich als komplizierter. Es ist unmöglich, jede konvexe Partition als Voronoi-Diagramm darzustellen, aber wenn es eine Lösung gibt, ist die Menge der Zentren S im Allgemeinen nicht eindeutig (Biedl, Held & Huber, 2013; Hartvigsen, 1992).

Unterrichtssequenz

Die vorgestellte Unterrichtssequenz ist für Schülerinnen und Schüler ab der 6. Schulstufe geeignet. Als inhaltliche Voraussetzung dienen Kenntnisse über Streckensymmetrale und ihre Eigenschaften.

Die Unterrichtssequenz startet mit dem dynamischen Arbeitsblatt „Von wo bekomme ich meine Post?“ (Abbildung 1). Die Problemstellung lautet wie folgt: „In Linz werden fünf Postämter (Punkte auf der Karte) eröffnet. Jedes Haus soll vom nächstgelegenen Postamt (Luftlinie) versorgt werden. Erstelle die Zustellbereiche für jedes Postamt.“ Die Lernenden sollen das Problem für drei beziehungsweise fünf Punkte ohne Vorwissen über Voronoi-Diagramme lösen.

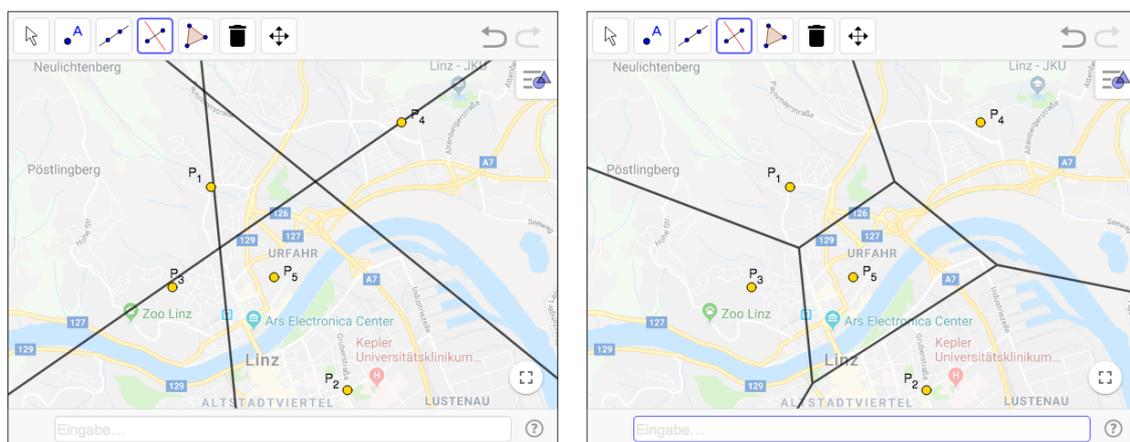


Abb. 1: GeoGebra-Applet „Von wo bekomme ich meine Post?“ (<https://www.geogebra.org/m/g8rmcq7z>)

Um das Problem zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler die Streckensymmetralen der Verbindungsstrecken der gegebenen Punkte konstruieren. Nach der Erstellung des Voronoi-Diagramms haben die Lernenden Zeit, sich mit einigen Fragen zur Argumentation der Vorgehensweise zu befassen (z. B. Warum erstellt man Streckensymmetralen?, Wie viele müssen

konstruiert werden?). Anschließend können die Lernenden mit dem GeoGebra-Applet „Aufstellung bei einem Fußballspiel“ (<https://www.geogebra.org/m/t7uh5WCM>) an einer anderen Anwendung arbeiten. In Aufgabe a müssen sie eine Region eines Voronoi-Diagramms konstruieren. In Aufgabe b können die Lernenden ihre eigene Aufstellung einer Fußballmannschaft für 11 oder 10 Spieler modellieren.

Im zweiten Schritt der Sequenz erfolgen die mathematische Erarbeitung des Themas und eine Einführung der Begriffe Voronoi-Diagramm und Voronoi-Zentrum. Zuerst konstruiert man händisch das Voronoi-Diagramm für zwei Zentren basierend auf dem Vorwissen über Streckensymmetralen, gefolgt von der Erzeugung der Voronoi-Region aus einem von mehreren Punkten (Abbildung 2). Die manuelle Konstruktion eines Diagramms soll die mathematischen Hintergründe hinter dem Muster besser sichtbar machen.

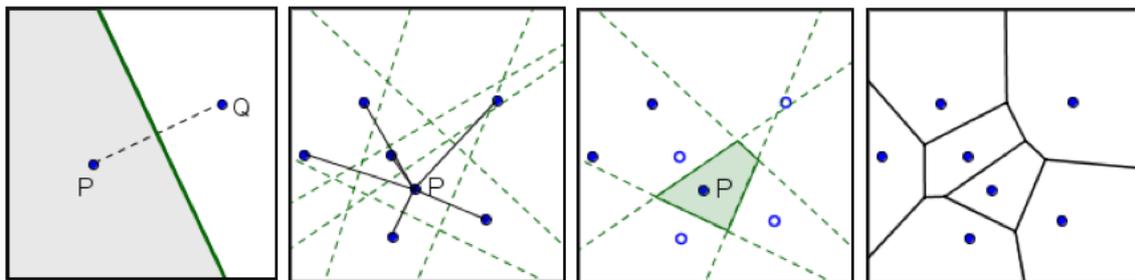


Abb. 2: Konstruktion eines Voronoi-Diagramms

In der Natur gibt es verschiedene Strukturen, die Voronoi-Diagrammen zu entsprechen scheinen (z. B. Libellenflügel, Wabenstruktur, Schildkrötenpanzer) (Baudson & Klein, 2006; Glaeser, 2011). Obwohl die Bestimmung der Voronoi-Zentren bei einer gegebenen Struktur auf Schülerniveau nicht möglich ist, bietet GeoGebra eine Experimentierumgebung, mit der Lernende ein Voronoi-Diagramm nach einem Bild aus Natur oder Architektur modellieren können. Die Lernenden können dies mit bereitgestellten Mustern und vorbereiteten Applets versuchen (<https://www.geogebra.org/m/rpv2z4sr>) oder eigene Bilder wählen und diese softwaregestützt untersuchen.

Die Gestaltung architektonischer Elemente und Strukturen mithilfe von Voronoi-Diagrammen ist ein Trend in der architektonischen Gestaltung (Gawell & Nowak, 2015). Zunächst können die Lernenden verschiedene Objekte suchen, die von Künstlern mithilfe von Voronoi-Diagrammen entworfen wurden (z. B. <https://www.geogebra.org/m/zehpyhyv>). Schließlich kann mit Tinkercad (<https://www.tinkercad.com>) unter Verwendung von Voronoi-Mustern ein individuelles Objekt entworfen werden (Abbildung 3). Wir haben uns für diese Software entschieden, da sie einen einfachen Zugang zum 3D-Druck von Voronoi-Diagrammen bietet. Für diesen letzten Schritt sollten die Lernenden bereits Erfahrung in der Arbeit mit Tinkercad haben.

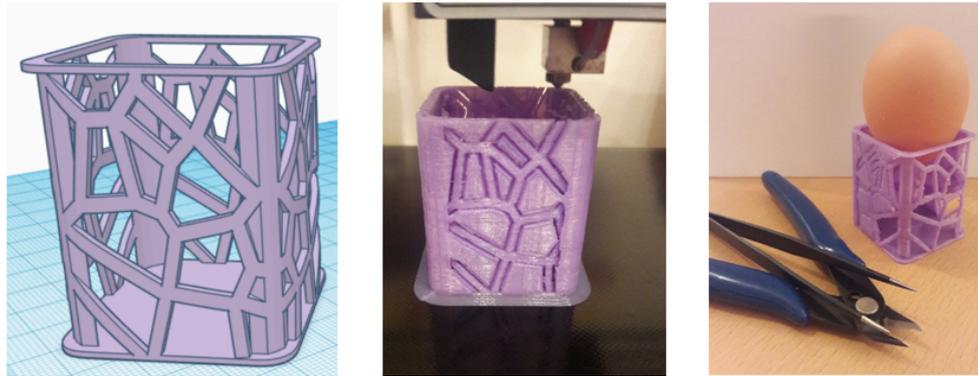


Abb. 3: 3D-Druck eines Eierbeckers

Bemerkungen

Diese Unterrichtssequenz wurde bereits mit Schülerinnen und Schülern der 11. Schulstufe eines österreichischen Gymnasiums sowie bei einem Workshop zur Förderung mathematisch begabter Schüler und Schülerinnen aus der 6. Schulstufe durchgeführt. „Voronoi-Diagramm“ (<https://www.geogebra.org/m/wezadxce>) bietet eine Sammlung aller Materialien.

Literatur

- Baudson, C. & Klein, E. (2006). *Berechnung und Visualisierung von Voronoi-Diagrammen in 3D* (Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn). <http://tizian.cs.uni-bonn.de/publications/BaudsonKlein.pdf> (02.12.2019).
- Biedl, T., Held, M. & Huber, S. (2013). Recognizing straight skeletons and Voronoi diagrams and reconstructing their input. *10th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, 37–46.
- Calonge, J. B. & Yagüe, L. M. (2016). Fostering creativity in the teaching of mathematics with project based learning. In E. Torrence, B. Torrence, C. Séquin, D. McKenna, K. Fenyvesi & R. Sarhangi (Hrsg.), *Bridges Finland Conference Proceedings* (S. 57–64), Phoenix: Tessellations Publishing.
- Gawell, E. & Nowak, A. (2015). Voronoi tessellation in shaping the architectural form from flat rod structure. *PhD Interdisciplinary Journal*, 47–55.
- Glaeser, G. (2011). *Wie aus der Zahl ein Zebra wird – Ein mathematisches Fotoshooting*. Heidelberg: Spektrum Verlag.
- Hartvigsen, D. (1992). Recognizing Voronoi diagrams with linear programming. *ORSA Journal on Computing*, 4, 369–374.
- Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Greefrath, G. (2015). Anwenden und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357–383). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Rousseau, C. & Saint-Aubin, Y. (2012). *Mathematik und Technologie*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.