Andreas LINDNER, Linz

Entwicklung von dynamischen Arbeitsblättern für die Lehre in Analysis

Studierende der Mathematik stehen beim Lernen oft vor der Herausforderung, formale Definitionen und Sätze mit anschaulichen Vorstellungen in Einklang zu bringen. In vielen Fällen können Visualisierungen der mathematischen Inhalte helfen diese Brücke zu schlagen. Gerade im Bereich der Analysis bieten sich viele Möglichkeiten, zusätzlich zu einem konventionellen Skriptum ergänzende Lernmaterialien als Lernhilfe bereitzustellen. In dem Vortrag werden eine Reihe von Materialien für die Vorlesung und Übung aus Analysis vorgestellt.

Grundlegende Intention

Oftmals stellen die Lehrveranstaltung aus Analysis ein gewisse Hürde im Mathematikstudium dar. Hohe Dropout-Raten haben an den vielen Studienstandorten zu unterschiedlichen Maßnahmen geführt, um Studierende bei der Bewältigung der Herausforderung zu unterstützen. Neben Tutorien und Brücken- oder Aufbaukursen können auch zusätzliche interaktive Arbeitsblätter den Studierenden helfen, die Lerninhalte besser zu erfassen, langfristig zu sichern und in Aufgabenstellungen gezielt anzuwenden.

Die Grundintention bei der Entwicklung der vorgestellten Materialien war immer das Bestreben, den Studierenden eine Möglichkeit zu bieten, die oft sehr abstrakt formulierten Definitionen und Sätze in anschaulicher Weise – wo dies möglich ist – aufzubereiten. Dabei sollen die Studierenden selbst abhängig von der konkreten Problemstellung beispielsweise Parameter variieren, Veränderungen untersuchen oder Auswirkungen beobachten. Weigand & Weth (2002) sprechen in diesem Zusammenhang vom Prinzip der adäquaten Visualisierung.

Alle beschriebenen Arbeitsblätter wurden mit GeoGebra erstellt und sind auf der Materialienplattform https://www.geogebra.org/materials als GeoGebra-Bücher unter den Titeln Analysis I und Analysis II frei verfügbar.

Zum Einsatz kommen die vorgestellten Arbeitsblätter vor allem in den Übungen zu Analysis, um das Verständnis von Sachverhalten zu vertiefen oder vielfach auch um Rechenergebnisse zu überprüfen.

Anhand einiger ausgewählter Beispiele soll nun der sinnvolle Einsatz von interaktiven Arbeitsblättern vorgestellt werden. Der Leser ist dabei eingeladen, alle vorgestellten Materialien und eine Vielzahl von weiteren Beispielen unter der angegebenen Webadresse selbst auszuprobieren.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Analysis I

Folgen und Grenzwert: Die Definition des Grenzwert einer (Zahlen)Folge mit „Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein n0 …“ bereitet Studierenden erfahrungsgemäß einige Probleme. Hier kann eine Visualisierung Hilfestellung geben.

Mithilfe eines Schiebereglers kann der Wert von ϵ variiert werden. Wenn nun die Lernenden den Index n verändern, so wird für jedes Folgenglied an angezeigt, ob es sich innerhalb oder außerhalb der ϵ-Umgebung befindet. Auf diese Weise kann gezeigt werden, dass die Folgenglieder erst für größere Werte von n in die ϵ-Umgebung kommen, wenn ϵ kleiner gewählt wird, vorausgesetzt ein Grenzwert existiert.

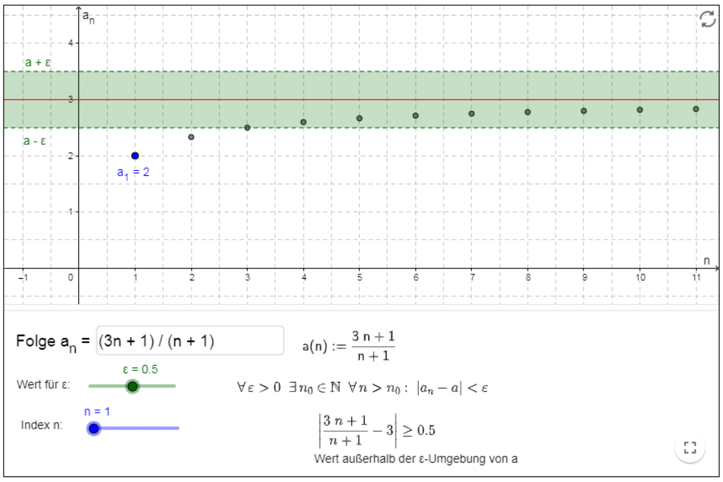

Abb. 1: Folgen und Grenzwert (GeoGebra)

Eine Visualisierung stellt im besten Falle eine hilfreiche Unterstützung für Lernende dar, sie birgt aber immer auch Gefahren für das Entstehen von Fehlvorstellungen. Einige Aspekte sollten aus diesem Grund mit den Studierenden im Zusammenhang mit dieser Veranschaulichung thematisiert werden:

In keiner Abbildung kann eine Folge als Ganzes gezeigt werden; in der Abbildung 1 sieht man beispielsweise nur die ersten 12 Glieder der Folge.

Aus dem Verhalten der ersten 12 Glieder einer Folge kann man keinen Schluss auf die Existenz oder den Wert eines Grenzwerts ableiten. Die Existenz eines Grenzwerts muss mit anderen Methoden bewiesen werden.

Der Grenzwert einer Folge ist eine Zahl; in der Visualisierung wird diese allerdings durch eine waagrechte Gerade dargestellt.

Die ϵ-Umgebung ist grundsätzlich ein Intervall, wird in der Visualisierung aber als Streifen dargestellt.

Reihen: Dass die harmonische Reihe divergiert, wird standardmäßig in vielen Lehrwerken über Analysis bewiesen. Langfristig einprägen kann man sich diese Tatsache auch durch die Vorstellung eines Hölzer- oder Bücherstapels, der so aufgebaut wird, dass trotz eines Überhangs der Schwerpunkt stets genau über der Kante des ersten Holzes ist.

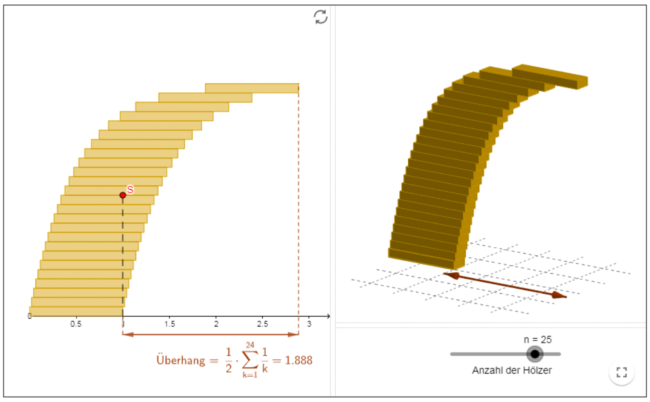

Abb. 2: Harmonische Reihe und Holzstapel (GeoGebra)

Der Überhang, der auf diese Weise erzeugt wird, kann mit der harmonischen Reihe berechnet werden. Somit kann eine Brücke gebaut werden, die (theoretisch) beliebig weit reicht, auch wenn sie dabei mehr hoch als weit wird (vgl. Humenberger, 1999).

Analysis II

Die Differential- und Integralrechnung für Funktionen in zwei Variablen bietet ein breites Feld für 3D-Visualiserungen.

Richtungsableitung: Die partiellen Ableitungen einer Funktion sind Ableitungen in Richtung der Koordinatenachsen, während der Anstieg in eine beliebige Richtung durch die Richtungsableitung angegeben wird.

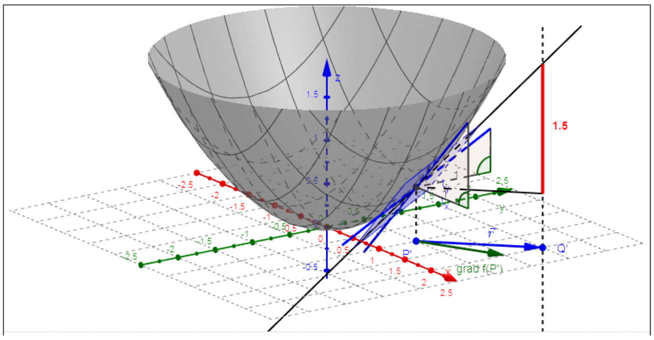

Abb. 3: Richtungsableitung (GeoGebra)

In diesem interaktiven Applet zur Veranschaulichung der Richtungsableitung sind die Funktion, die Stelle, an der die Ableitung gebildet wird, sowie die Richtung veränderbar.

Taylor-Polynome: Diese Polynome werden verwendet, um Funktionen innerhalb einer Umgebung um eine Entwicklungsstelle zu approximieren. Während Darstellungen von Taylor-Polynomen für Funktionen in einer Variablen eventuell bereits aus der Schulmathematik bekannt sind, beschränkt sich die Behandlung von Taylor-Polynomen für Funktionen mit zwei oder mehreren Variablen oft auf eine formale Definition und ein schematisches Berechnen der gesuchten Polynome n-ter Ordnung.

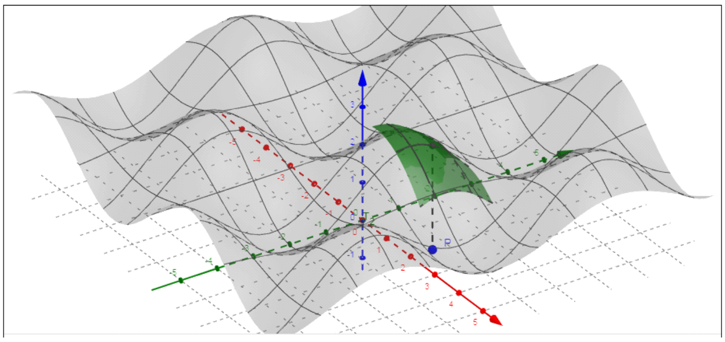

Abb. 4: Taylor-Polynom für eine Funktion in zwei Variablen (GeoGebra)

Gerade in diesem Fall ermöglicht eine Visualisierung die Darstellung der Approximation der Funktion durch die entsprechenden Polynome. Die ganze Dynamik der Darstellung entwickelt sich allerdings erst beim Verschieben der Entwicklungsstelle, in Abbildung 4 des Punktes in der xy-Ebene.

Integralrechnung: Als abschließendes Beispiel soll noch exemplarisch die Veranschaulichung eines Doppelintegrals, hier konkret des Satzes von Fubini für Rechtecke, gezeigt werden.

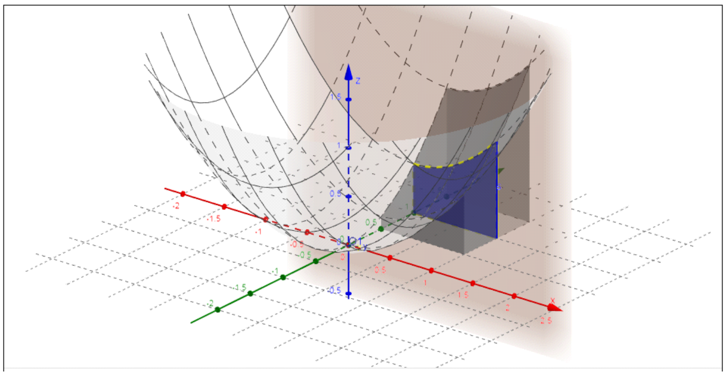

Abb. 5: Mehrdimensionales Integral (GeoGebra)

Literatur

Lindner, A. (2016). *Analysis I.* https://www.geogebra.org/m/hJCe3vDp (21.12.2019)

Lindner, A. (2016). *Analysis II*. https://www.geogebra.org/m/Cvn52Hg6 (21.12.2019)

Humenberger, H. (1999). Problemlösen (II). *PM,* 3(41), 105–113.

Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002). *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.