Michael MEYER, Köln & Daniel SOMMERHOFF, München

Bewertung von (potenziellen) Beweisen im Verlauf des Studiums. Erste Einblicke in eine mixed-methods Studie

Mathematisches Argumentieren und Beweisen gelten als Fundament der Mathematik als Wissenschaft (z.B. Heintz, 2000) und sind auch in Schule und Bildungsstandards als zentrale Elemente verortet (Kultusministerkonferenz, 2004). Empirische Ergebnisse zeigen jedoch, dass Schülerinnen und Schüler erhebliche Probleme bei der Konstruktion (z.B. Heinze et al., 2009) und dem Validieren (z.B. Healy & Hoyles, 2000) von Argumentationen und Beweisen haben. Zentrale Aufgabe der mathematischen Lehramtsausbildung ist entsprechend, zukünftige Lehrkräfte mit dem Konzept mathematischer Argumentationen und Beweise sowie deren zentralen Funktionen und Eigenschaften, vertraut zu machen und diese zu einem professionellen Umgang mit ebendiesen zu befähigen.

Die vorliegende Studie vergleicht daher Studierende zu Beginn und Ende des Studiums und widmet sich der Analyse von deren Rezeption und Validierung von Argumentationen bzw. Beweisen.

Theoretischer Hintergrund

Obwohl die Begriffe „Argumentation“ und „Beweis“ im Bereich der Mathematik nicht einheitlich verwendet werden (vgl. Reid & Knipping, 2009), wird ein mathematischer Beweis meist als mathematische Argumentation verstanden, die den (lokalen) Normen und Akzeptanzkriterien der Community entspricht (vgl. Reiss & Ufer, 2009; Sommerhoff & Ufer, 2019).

Der Prozess des Validierens, in dem eine Argumentation bzw. ein Beweis gelesen wird und dessen Gültigkeit eingeschätzt wird (Selden & Selden, 2015), basiert entsprechend auf verschiedenen Charakteristika von Argumentationen bzw. Beweisen. Als wesentliche Grundlage für entsprechende Charakteristika kann das Argumentschema von Toulmin (1996) gesehen werden. Entsprechend der strukturellen Perspektive nach Toulmin besitzen Argumente verschiedene funktionale Elemente: Die Elemente „Datum“, „Konklusion“ und „Regel“ lassen sich direkt mit denjenigen eines deduktiven Beweises vergleichen. Die Elemente „Ausnahmebedingung“ und „Stützung“ hingegen verdeutlichen, dass ein (schulmathematisches) Argument auch andere Aspekte fokussiert als ein hochschulmathematischer Beweis, wobei etwa Inglis, Mejia-Ramos und Simpson (2007) auch hier die Wichtigkeit beider Elemente unterstreichen. Ihre empirischen Untersuchungen be-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

schreiben für HochschulmathematikerInnen unter anderem weitere Bewertungskriterien für Beweise, wie z. B. die Ausführlichkeit eines Beweises. Hierbei konkurrierte das Prägnanzkriterium beispielsweise mit dem Kriterium, dass jedes Zeichen eingehend erläutert werden muss. Vergleichbar stellten Meyer & Schnell (2016) heraus, dass Lehrpersonen bei der Bewertung von Argumenten eher inhaltliche Kriterien fokussieren und weniger die Ausführlichkeit der Argumente thematisierten. Auch die Unterscheidung verschiedener Beweistypen (Wittmann & Müller, 1988) sowie die Funktionen von Argumentationen bzw. Beweisen (de Villiers, 1991) können wesentliche Aspekte bei der Bewertung von Beweisen sein.

Forschungsfragen

Für Studierende liegen bisher kaum Erkenntnisse vor, welche Aspekte von Beweisen bei deren Bewertung von besonderer Wichtigkeit sind (z. B. Sommerhoff & Ufer, 2019) und wie sich diese im Verlauf des Studiums verändern. In der vorliegenden Studie werden Studierende des 1. und 8. Semesters hinsichtlich ihrer Bewertungen von Argumentationen bzw. Beweisen untersucht und verglichen. Folgenden Forschungsfragen waren zentral:

FF1: Unterscheiden sich Studierende des 1. und 8. Semesters hinsichtlich Ihrer Einschätzung von Funktionen von Argumentationen bzw. Beweisen?

FF2: Unterscheiden sich Studierende des 1. und 8. Semesters hinsichtlich Ihrer Bewertung von potenziellen Argumentationen bzw. Beweisen?

Methode

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurden insgesamt N = 384 Studierende einer großen deutschen Universität befragt. Dabei wurden 258 Studierende zu Beginn des 1. Semesters befragt (149 LA Grundschule, 106 LA Sonderpädagogik, 3 divers) sowie 126 Studierende am Ende des Studiums (8. bzw. 9. Semester, 53 LA Grundschule, 70 LA Sonderpädagogik).

Die Studierenden beantworteten im Rahmen eines Online-Fragebogens zunächst einige demographische Fragen, bevor sie gebeten wurden 16 potenzielle Beweise summativ zu bewerten (Notenskala von 1 – sehr gut bis 6 – ungenügend) sowie ihre Bewertungen zu begründen. Die potenziellen Beweise wurden dabei als Beweise von Lernenden eingeführt, welche auf die Aussage „Bestimmt gibt es irgendwann bei richtig großen Zahlen keine Primzahlen mehr. Es gibt also nur endlich viele Primzahlen“ und der Aufforderung nach Angabe einer Begründung für oder gegen die Korrektheit derselben erfolgten. Die in dem Fragebogen zu bewertenden Antworten wurden hälftig als Beweise, hälftig als Argumente bezeichnet, um Effekte hinsichtlich der Bezeichnung erfassen zu können (im Folgenden nicht genauer dargestellt). Die Zuordnung der Fragebögen erfolgte wahllos (elektronisch).

Die präsentierten 16 potenziellen Beweise wurden dabei entsprechend dem Modell nach Toulmin, den Beweistypen nach Wittmann & Müller, sowie weiteren in früheren Studien identifizierten Aspekten, variiert, indem beispielsweise die funktionalen Elemente der Argumente/Beweise (z. B. fehlte bei einigen Argumentationen bzw. Argumentschritten eine Regel, während bei anderen etwa eine falsche gegeben wurde) oder der Typ des Beweises geändert wurde. Auch wurden einige Argumente sprachlich ausführlich dargestellt, während andere sehr formell und formal waren (vgl. Abbildung 1).

Angenommen, es gibt unendlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Wir bilden die Zahl $(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$. Dies ist eine natürliche Zahl.

$\xRightarrow{\textit{Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie}}$ $(p_1 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$ hat einen Primteiler (wir nehmen den kleinsten Teiler nach Hauptsatz)

$\xRightarrow{\text{gegebene Primzahlen } p_1,\ldots,p_n \text{ lassen bei Division von } (p_1 \cdot \ldots \cdot p_n)+1 \text{ den Rest 1}}$ Es gibt mehr Primzahlen als angenommen.

Abb. 1: „Petra’s Beweis“

Der in Abbildung 1 dargestellte Beweis zeichnet sich durch seine prägnante Darstellung aus. Im ersten Teil des Beweises wird nicht weitergehend analysiert, warum der Term für jede Belegung mit Primzahlen eine natürliche Zahl ergibt. Im letzten Teil des Beweises wird als Satz bzw. Regel nicht die Division mit Rest angegeben, sondern ihre Anwendung.

In drei Abschlussfragen sollte die Fragebogenstudie retrospektiv überblickt und die Relevanz verschiedener Funktionen von Beweisen (Verifikation, Erklärung, Systematisierung, Entdeckung, Kommunikation, symbolische Darstellung) auf einer Likert-Skala von 0 bis 5 eingestuft werden.

Ergebnisse & Diskussion

Erste Analysen der Daten zeigen, dass die Qualität der Beweise mit einer Gesamtnote von 2.93 insgesamt als eher mittelmäßig wahrgenommen wurde. Dabei unterschieden sich Studierende im 1. Semester (M = 3.04; SD = 0.56) und im 8. Semester (M = 2.70; SD = 0.54) signifikant und mit einem mittleren Effekt d = 0.62. Die Ergebnisse zeigen weiter, dass die Studierenden am Studienende 10 der 16 vorgelegten Beweise besser bewerteten als die Studierenden zu Studienbeginn. Möglicher Grund hierfür kann in der unterschiedlichen Gewichtung verschiedener Funktionen von Argumentation bzw. Beweisen liegen: Während für die Studierenden im hohen Semester das Kommunizieren und das Erklären wichtigere Funktionen des Beweisens waren, war dies bei Studienbeginn noch die symbolische Darstellung.

Obwohl die initialen quantitativen Analysen bereits deutliche Unterschiede zwischen den Studierenden des 1. und 8. Semesters offenbaren, ist die Aussagekraft zunächst begrenzt, da Ursachen für Unterschiede nur teilweise erfasst werden können. Erst die Analyse der jeweiligen Erläuterungen und enthaltenen Kriterien werden Aufschluss darüber geben können, ob bspw. ein Beweis mit fehlender Regel auch deswegen schlechter bewertet wurde.

Hinweis: Dies ist ein Forschungsprojekt der Universität zu Köln und der LMU München.

Literatur

Healy, L. & Hoyles, C. (2000). A study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education,* 31(4), 296–428.

Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer.

Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L. & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM,* 40(3), 443–453.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66(1), 3–21.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. Bonn: KMK.

Meyer, M. & S. Schnell (2017). Beurteilung von Argumenten durch Lehrkräfte – individuelle Bewertungskriterien und strukturelle Überlegungen. In U. Kortenkamp & A. Kuzle (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S 661–664). Münster: WTM.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV),* 111(4), 155–177.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Selden, A. & Selden, J. (2015). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *KHDM Proceedings Hannover Germany December 2015* (S. 339–345). Hannover, Germany.

Sommerhoff, D. & Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM Mathematics Education,* 51(5), 717–730.

Toulmin, S. E. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten*. Weinheim: Beltz.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik – Theorie und Praxis* (S. 237–258). Berlin: Cornelsen.

Villiers, M. de (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* 24, 17–24.