Andreas OBERSTEINER, Freiburg & Johannes ROSENKRANZ, Freiburg

Größenvorstellungen zu Bruchzahlen – eine Pilotstudie im sechsten Schuljahr

1. Theoretischer Hintergrund

1.1 Bedeutung von Größenvorstellungen

Unter Größenvorstellungen verstehen wir im engeren Sinne die Fähigkeit, ein Bruchzahlsymbol (z. B. 3/7) schnell mit seiner (möglichst exakten) Größeninformation (also 3/7 als Zahl etwas kleiner als 1/2) verknüpfen zu können (vgl. Obersteiner, 2018). Insbesondere geht es bei Größenvorstellungen nicht um die Anwendung von Algorithmen, bei denen die Zähler und Nenner getrennt betrachtet werden und die Größe der Brüche unberücksichtigt bleibt. Zahlreiche Studien zeigen, dass viele Schülerinnen und Schüler auch nach der Behandlung der Bruchrechnung im Unterricht nicht über ausreichende Größenvorstellungen zu Bruchzahlen verfügen (Lortie-Forgues et al., 2015; Obersteiner et al., 2019). Dies ist problematisch, weil gerade Größenvorstellungen in vieler Hinsicht beim Umgang mit Brüchen hilfreich sind, beispielsweise beim Prüfen eines Rechenergebnisses auf Plausibilität. Empirische Studien zeigen allgemein einen engen Zusammenhang zwischen Leistungen in Aufgaben zu Größenvorstellungen für Bruchzahlen einerseits und Mathematikleistung andererseits (z. B. Torbeyns et al., 2015).

1.2 Methodische Erfassung

Die Definition des Begriffs Größenvorstellung beinhaltet einen Zeitaspekt und einen Genauigkeitsaspekt. Deshalb erscheinen für eine empirische Erhebung von Größenvorstellung Methoden notwendig, welche nicht nur die Lösungsrate (richtig/falsch), sondern auch den Grad der Genauigkeit sowie die Reaktionszeiten erfassen. Mit computerbasierten Erhebungsmethoden, wie sie bislang vorwiegend in kognitionspsychologischen Studien eingesetzt werden, ist eine solche Erfassung möglich. Zur Erfassung von Größenvorstellungen für Bruchzahlen sind in der Literatur zwei Aufgabenformate üblich, nämlich der schnelle *Zahlvergleich* sowie das Einordnen von Brüchen am *leeren Zahlenstrahl*. Beim *Zahlvergleich* werden auf einem Computerbildschirm zwei Zahlen – in diesem Fall Brüche – nebeneinander präsentiert. Aufgabe der Probanden ist es, so schnell wie möglich zu entscheiden, welche der beiden Zahlen die numerisch größere ist. Als Maß werden die Lösungsraten und – vor allem bei Deckeneffekten in den Lösungsraten – die Reaktionszeiten verwendet. Ferner ist von Interesse, ob sich ein „Distanzef-

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

fekt“ zeigt: Hängen die Lösungsraten bzw. Reaktionszeiten von der numerischen Distanz (Differenz) der beiden Vergleichszahlen ab, so ist dies ein Hinweis darauf, dass die Person die Größen der Zahlen tatsächlich zum Vergleich herangezogen hat (Moyer & Landauer, 1967). Dies ist beispielsweise dann *nicht* der Fall, wenn der Vergleich auf auswendig gelerntem Faktenwissen beruhen würde, oder auf einem separaten Vergleich einzelner Komponenten der Brüche (der Nenner oder der Zähler; Obersteiner et al., 2013). Bei der Aufgabe *Leerer Zahlenstrahl* wird ein bis auf die Endpunkte unmarkierter Zahlenstrahl zusammen mit einer Zahl präsentiert, die von den Probanden an die korrekte Stelle auf dem Zahlenstrahl eingetragen werden muss. Als Maß für Größenvorstellungen wird die prozentuale Abweichung der gewählten Position von der korrekten Position (PAE = Percent Absolute Error) verwendet (z. B. Siegler & Opfer, 2003).

Obwohl beide Aufgabenformate in zahlreichen Studien zur Erfassung von Größenvorstellungen für Bruchzahlen verwendet wurden, ist nicht vollständig geklärt, ob beide tatsächlich gleichermaßen geeignet sind, Größenvorstellungen zu erfassen (Schneider et al., 2018). Ferner ist der Zusammenhang zwischen den beiden Maßen für Größenvorstellungen einerseits und dem prozeduralen und konzeptuellen Wissen über Bruchzahlen andererseits nicht ausreichend geklärt.

2. Ziele und Forschungsfragen

Die hier vorgestellte Pilotstudie ist Teil eines Forschungsprojekts, in dem Größenvorstellungen bei Schülerinnen und Schülern im sechsten Schuljahr vor und nach einer gezielten Förderung untersucht werden. Die Pilotstudie zielt ab auf die Entwicklung der Testinstrumente und die Untersuchung der folgenden Forschungsfragen: (1) Lassen sich mit den computerbasierten Aufgabenformaten *Zahlvergleich* und *leerer Zahlenstrahl* Größenvorstellungen zu Brüchen reliabel erfassen? (2) Wie stark sind Größenvorstellungen für Bruchzahlen bei Schülerinnen und Schülern im sechsten Schuljahr kurz nach der Einführung von Bruchzahlen (aber vor einer gezielten Intervention) ausgeprägt? (3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Größenvorstellungen für Brüche einerseits und dem konzeptuellen und prozeduralen Wissen über Brüche andererseits?

3. Methode

Die Stichprobe bestand aus 99 Schülerinnen und Schülern in der sechsten Jahrgangsstufe (Alter: 11,5 Jahre). Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten an Laptops zunächst 48 Aufgaben zum Bruchzahlvergleich. Sie sollten per Tastendruck jeweils den größeren von zwei gleichzeitig präsentierten

Brüchen auswählen. Bei allen Brüchen handelte es sich um vollständig gekürzte, echte Brüche. Bruchpaare mit gleichen Zählern oder Nennern waren nicht enthalten. Eine Reihe von potentiell relevanten Faktoren (z. B. mittlere Differenz zwischen Brüchen, Lage der Brüche bezüglich 1/2) wurde systematisch variiert. Weiterhin bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler 36 Zahlenstrahlaufgaben, bei denen jeweils ein Bruch zusammen mit einem leeren Zahlenstrahl präsentiert wurde, dessen Enden mit 0 und 1 beschriftet waren. Die Schülerinnen und Schüler sollten mit der Maus so schnell und genau wie möglich die entsprechende Position auf dem Zahlenstrahl anklicken. Zur Erfassung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen über Brüche wurde ein von Lenz et al. (2019) entwickelter schriftlicher Test eingesetzt. Dieser enthält insgesamt 43 Items zum grundlegenden konzeptuellen Verständnis für Brüche sowie zum Ausführen einfacher Rechenverfahren mit Brüchen. Als Kontrollmaße wurden Maße für die fluide Intelligenz sowie des visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnisses verwendet.

4. Ergebnisse

Da sich in allen Aufgaben große Varianzen in den Lösungsraten zeigten, beziehen sich die hier berichteten Werte zunächst nur auf die Lösungsraten, nicht auf die Reaktionszeiten.

Die Reliabilitäten waren sowohl für den Bruchzahlvergleich als auch für die Zahlenstrahlaufgabe sehr hoch (Cronbach's α = .84 bzw. .94). Zwischen den beiden Maßen zeigte sich ferner eine hohe, aber nicht perfekte Korrelation von $r = –.65$, was darauf hindeutet, dass beide Maße zur Erfassung von Größenvorstellungen von Brüchen geeignet sind, sie aber möglicherweise von unterschiedlichen Optionen für die Strategiewahl beeinflusst werden. Insgesamt zeigten die Schülerinnen und Schüler mäßig hoch ausgeprägte Größenvorstellungen. Die mittlere Lösungsrate in der Zahlvergleichsaufgabe lag mit M = 65% (SD = 16) zwar signifikant über der Ratewahrscheinlichkeit von 50%; über die Stichprobe hinweg zeigte sich aber kein signifikanter Distanzeffekt. In der Zahlenstrahlaufgabe lag die mittlere prozentuale Abweichung vom korrekten Wert bei PAE = 14% (SD = 10), was in etwa mit den in der Literatur berichteten Werten übereinstimmt.

Alle partiellen Korrelationen (unter Kontrolle von Intelligenz und Arbeitsgedächtnis) zwischen den beiden Maßen der Größenvorstellung einerseits und dem prozeduralen und konzeptuellen Wissen andererseits waren hoch ($r > .52$) und signifikant. Erwartungsgemäß korrelierten Maße der Größenvorstellung stärker mit dem konzeptuellen Wissen als mit dem prozeduralen Wissen.

5. Diskussion

Die vorliegende Pilotstudie zeigt, dass sich Größenvorstellungen für Bruchzahlen bei Schülerinnen und Schülern im sechsten Schuljahr computerbasiert reliabel erheben lassen. Die Ausprägungen der Größenvorstellungen zu Bruchzahlen waren in der vorliegenden Stichprobe mäßig hoch. Weitere Analysen deuten allerdings auf gravierende inter-individuelle Unterschiede hin. Größenvorstellungen für Bruchzahlen hängen erwartungsgemäß mit prozeduralem und konzeptuellem Wissen über Brüche zusammen. Die geplante Interventionsstudie mit einer gezielten Förderung von Größenvorstellungen kann Aufschluss über die Wirkrichtung dieser Zusammenhänge geben.

Literatur

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L. & Wittmann, G. (2019). Two types of knowledge? – An empirical study focussing on the separability of conceptual and procedural knowledge. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale Hrsg.), *Proceedings of the 43rd PME Conference* (Vol. 3, S. 9–16). Pretoria, South Africa: PME.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning of fractions and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review,* 38, 201–221.

Moyer, R. S. & Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. *Nature,* 215, 1519–1520.

Obersteiner, A. (2018). *Number sense across number domains: An integrated mathematics educational and cognitive psychological perspective. Habilitation Thesis.* Munich: Technical University of Munich.

Obersteiner, A., Dresler, T., Bieck, S. M. & Moeller, K. (2019). Understanding fractions: Integrating results from mathematics education, cognitive psychology, and neuroscience. In A. Norton & M. Alibali (Hrsg.), *Constructing number: merging perspectives from psychology and mathematics education* (S.135–162)Cham,Switzerland: Springer

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning and Instruction,* 28, 64–72.

Schneider, M., Merz, S., Stricker, J., De Smedt, B., Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Luwel, K. (2018). Associations of number line estimation with mathematical competence: a meta-analysis. *Child Development,* 89, 1467–1484.

Siegler, R. S. & Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations. *Psychological Science,* 14, 237–243.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction,* 37, 5–13.

Förderung

Das vorliegende Projekt wird gefördert durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG; Förderkennzeichen OB 412/2-1).