

Friederike OSTKIRCHEN, Münster

Fallstudie zum Mathematischen Modellieren unter Berücksichtigung der Leistungsheterogenität

Eine Schülerschaft, die eine zunehmende Heterogenität aufweist, stellt Lehrkräfte vor eine größer werdende Herausforderung. Eine Möglichkeit dieser Heterogenität im regulären Klassenverband gerecht zu werden, stellt der Einsatz selbstdifferenzierender Aufgaben dar (Büchter & Leuders, 2005). Aus mathematikdidaktischer Sicht sind im Zuge dessen Modellierungsaufgaben von besonderem Interesse. Die authentischen Realitätsbezüge und die Offenheit von Modellierungsaufgaben bezüglich ihrer verschiedenen Zugänge und Lösungswege stellen ein potenzielles Differenzierungsvermögen dar und können somit eine Möglichkeit für einen produktiven Umgang mit Heterogenität bieten (Maaß, 2007). Das Projekt DiMo⁺ untersucht schwerpunktmäßig die Heterogenitätsdimension mathematische Leistung und Modellierungskompetenz von Lernenden der Sekundarstufe I. Der Beitrag beschreibt erste Ergebnisse, inwiefern sich die Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe unter Berücksichtigung des Aspektes der Leistungsheterogenität unterscheidet.

Modellierungskompetenz

Modellieren fokussiert den „Prozess des Lösens von Problemen aus der Realität“ (Greefrath et al., 2013, S.11) mit Hilfe von Mathematik. Modellierungskompetenz kann als die Fähigkeit beschrieben werden, „die jeweils nötigen Prozessschritte beim Hin- und Herwechseln zwischen Realität und Mathematik problemadäquat auszuführen, sowie gegebene Modelle zu analysieren oder vergleichend zu beurteilen“ (Blum et al., 2007, zitiert nach Greefrath et al., 2013, S.18). Dabei lassen sich die Prozesse, die beim idealisierten Lösen einer Modellierungsaufgabe benötigt werden, in die folgenden sechs Teilkompetenzen unterteilen: verstehen, vereinfachen/strukturieren, mathematisieren, interpretieren, validieren und vermitteln (Blum, 2010). Charakteristisch für Modellierungsaufgaben ist, dass die Problemstellung eine Relevanz für die Schülerinnen und Schüler aufweist, authentisch hinsichtlich der Sachsituation und der Verwendung von Mathematik ist sowie eine Offenheit bezüglich unterschiedlicher Lösungswege bietet (Greefrath et al., 2017). Aufgrund dieser Offenheit bieten Modellierungsaufgaben Zugänge auf verschiedenen Leistungsniveaus, weshalb Unterschiede in den Bearbeitungsprozessen bei verschiedenen leistungsstarken Schülerinnen und Schülern von Interesse sind.

Untersuchungsdesign

Die Stichprobe setzte sich aus sechs Schülerinnen und Schülern einer neunten Klasse eines niedersächsischen G9 Gymnasiums zusammen. Die Auswahl der Schülerinnen und Schüler wurde nach vorheriger Erhebung der Mathematikleistung mittels eines Leistungstests für die neunte Klasse (DEMAT 9 Schmidt, Ennemoser & Krajweski, 2012) durchgeführt. Das Sampling dieser Untersuchung setzt sich aus je einem Paar mit niedrigem, mittlerem und hohem Leistungsniveau zusammen. Somit konnte das Leistungsspektrum einer Klasse abgedeckt werden. Die Schülerinnen und Schüler lösten eigenständig eine unterbestimmte Modellierungsaufgabe, wobei dieser Aufgabentyp vorab nicht im Unterricht thematisiert wurde. Die Aufgabe bestand darin, die Länge einer Lichterkette und die Anzahl der Glühlampen eines Weihnachtsbaumes vor einer Münsteraner Kirche zu ermitteln, wobei ihnen ein Foto des Baumes mit Lichterkette zur Verfügung stand. Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgte in Paaren, da dadurch eine natürliche Art der Kommunikation während des Lösungsprozesses geschaffen werden konnte. Das audiovisuelle Datenmaterial wurde transkribiert. Mittels der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2016) wurden die Teilkompetenzen des mathematischen Modellierens (Blum, 2010) dem Datenmaterial deduktiv zugeordnet und hinsichtlich der Fragestellung ausgewertet, inwiefern sich die Bearbeitung der Modellierungsaufgabe bei Lernenden hinsichtlich ihrer Leistung unterscheidet.

Ergebnisdarstellung

Diese Fallstudie zum mathematischen Modellieren in der Sekundarstufe I zeigt, dass alle drei Schülerpaare die Modellierungsaufgabe entsprechend ihres Leistungsniveaus lösen konnten. Im Folgenden werden die Bearbeitungsprozesse skizziert.

Fall 1: Niedriges Leistungsniveau

Das Schülerpaar, dem nach dem Leistungstest DEMAT 9 ein niedriges Leistungsniveau zuzuordnen ist, beschäftigt sich ca. 26 Minuten mit der Aufgabenbearbeitung. Bereits am Anfang des Bearbeitungsprozesses wählt es eine auf dem Foto abgebildete Person als Referenzgröße, die es danach jedoch nicht einbezieht. Sein Bearbeitungsprozess ist geprägt durch einen stetigen Wechsel zwischen den Phasen „Vereinfachen und Strukturieren“, „Mathematisieren“ und „mathematisch Arbeiten“. Es teilt den Baum in horizontale Abschnitte und misst in diesen Abschnitten die Breite der Baumkrone auf dem Foto. Ohne Verwendung eines Maßstabes schätzt es dazu gehörige Werte in der Realität. Diese Werte verdoppelt es, um auch die Rückseite des

Baumes zu betrachten. Schwierigkeiten bereitet ihm die mathematische Notation und die Division der berechneten Länge der Lichterkette durch einen angenommenen Abstand der Glühlampen. Es erhält eine Länge von 103 m und einer Anzahl von 687 Glühlampen als Ergebnis.

Fall 2: Mittleres Leistungsniveau

Die kürzeste Bearbeitungszeit von ca. 15 Minuten hat das Schülerpaar, dem ein mittleres Leistungsniveau zuzuordnen ist. Dieses fertigt zunächst eine Skizze des Baumes an. Bereits nach zwei Minuten erfolgt eine Mathematisierung durch die Modellierung der Baumkrone als gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe und Breite es schätzt. Anhand dieser geschätzten Werte berechnet es mit Hilfe des Satzes des Pythagoras die Schenkel des gleichseitigen Dreiecks. Es validiert diesen Ansatz jedoch und verwirft ihn nach ca. 6 Minuten. Nach einer weiteren Phase des Vereinfachens und Strukturierens teilt es die Baumkrone horizontal in Abschnitte, deren Längen es schätzt. Dabei bezieht es Alltagserfahrungen mit ein. Mit ihrem Vorgehen ist es nicht zufrieden, da es nur mit geschätzten Werten gerechnet hat. Das Schülerpaar versucht ein weiteres mathematisches Modell zu entwickeln, bricht diesen Prozess jedoch ab. Es berechnet eine Länge von 78 m und eine Anzahl von 780 Glühlampen.

Fall 3: Hohes Leistungsniveau

Die Bearbeitung der Gruppe mit dem höchsten Leistungsniveau hat mit ca. 28 Minuten die längste Bearbeitungszeit. Nachdem sie die ersten sechs Minuten die gegebene Problemsituation vereinfachen und strukturieren, nehmen sie zum ersten Mal eine Mathematisierung vor. Jedoch wechseln sie immer wieder in die Realität, um Größenordnungen anhand des Fotos festzumachen. Ihre erste Referenzgröße validieren sie nach sieben Minuten und entscheiden sich für eine andere, mit der sie die Höhe des Baumes bestimmen. Dieses Zwischenergebnis interpretieren und validieren sie erneut. Nach einer Diskussion über mögliche andere Vorgehensweisen entwickeln sie nach 15 Minuten den Plan, verschiedene Breiten der Baumkrone auf dem Foto zu messen und diese mit Hilfe des vorab bestimmten Verhältnisses umzurechnen. Ihre ermittelten Werte interpretieren und validieren sie immer wieder. Sie erhalten eine Gesamtlänge von ca. 105 m Lichterkette und ermitteln, unter der Annahme eines Abstandes von 10 cm zwischen den Glühlampen, eine Anzahl von ca. 1056 Glühlampen.

Diskussion

Die Bearbeitung dieser offenen Aufgabe der Schülerinnen und Schüler auf ihrem individuellen Leistungsniveau bestätigt den selbstdifferenzierenden

Charakter dieser Modellierungsaufgabe (Maaß, 2007). Trotz unterschiedlicher Annahmen und mathematischer Modelle erhielten sie Ergebnisse, die als realistisch eingeschätzt werden können. Während der Lösung der Aufgabe konnten individuelle Modellierungsverläufe beobachtet werden (Borromeo Ferri, 2007). Das Paar mit niedrigem Leistungsniveau wechselt häufig zwischen Realität und Mathematik und zeigt rechnerische Schwierigkeiten in der Phase des mathematischen Arbeitens. Das Schülerpaar, dem ein mittleres Leistungsniveau zugeordnet ist, trifft viele Vereinfachungen, sodass wenig mathematisches Arbeiten nötig ist. Nach dem sie ihr mathematisches Modell validieren, gelingt ihnen keine Modellverbesserung. Das Vorgehen der leistungsstarken Schülerinnen und Schüler ist durch Phasen der Interpretation und Validierung während des gesamten Bearbeitungsprozesses geprägt. Diese beobachteten Unterschiede beruhen lediglich auf drei Bearbeitungsprozessen einer Modellierungsaufgabe, sodass keine verallgemeinernden Aussagen getroffen werden können. Das weitere Forschungsinteresse liegt darin, die beobachteten Unterschiede in anderen Aufgabenbearbeitungen weitergehend zu untersuchen, um eine Typenbildung durchzuführen.

Literatur

- Blum, W. (2010). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht. Herausforderung für Schüler und Lehrer. *Praxis der Mathematik*, 34 (52), 42-48.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Hrsg.), *CERME 5 – Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education in Larnaca, Zypern* (S. 2080-2089).
- Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W. & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren – Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In Borromeo Ferri, R., Greefrath, G. & Kaiser, G. (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule; Theoretische und didaktische Hintergründe* (S. 11-37). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Greefrath, G., Siller, H.-S. & Ludwig, M. (2017). Modelling problems in German grammar school leaving examinations (Abitur) – Theory and practice. In Dooley T. & Gueudet, G. (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 932-939). Dublin
- Maaß, K. (2007). *Mathematisches Modellieren – Aufgaben für die Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Mayring, P. (2016). *Einführung in die qualitative Sozialforschung*. Weinheim: Beltz.
- Schmidt, S., Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2012). *DEMAT 9. Deutscher Mathematiktest für neunte Klassen*. Göttingen: Hogrefe Verlag.