Antonella PERUCCA, Luxemburg & Milko TODOROVIC, Luxemburg

Veranschaulichungen des Induktionsprinzips

Die vollständige Induktion ist eine sehr nützliche mathematische Beweismethode, die man auch ohne fortgeschrittene mathematische Kenntnisse verstehen kann.

Vollständige Induktion: Seien Aussagen P(n) gegeben, wobei n eine natürliche Zahl ist. Wenn P(0) wahr ist (dies ist der Induktionsanfang) und wenn für jedes n aus der Aussage P(n) die Aussage P(n+1) folgt (dies ist der Induktionsschritt), dann sind alle Aussagen P(n) wahr.

Es handelt sich um eine Kettenreaktion. Man veranschaulicht diese üblicherweise mit dem Dominoeffekt: eine unendliche Reihe von hochkanten Dominosteinen fällt durch Antippen des ersten Steins um.

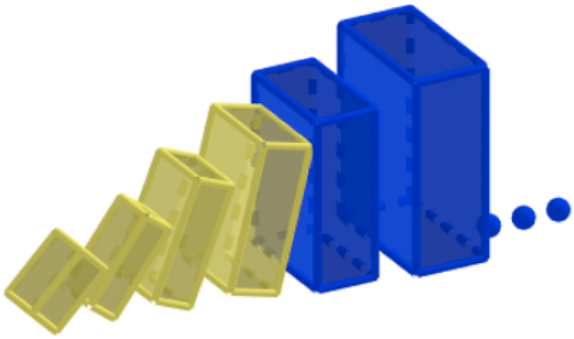
Abzählbar unendlich viele Aussagen: Es könnte sein, dass die Aussagen nicht durch die natürlichen Zahlen parametrisiert sind, sondern durch eine andere abzählbar unendliche Menge. In diesem Fall kann man ein erstes Element auswählen, dann ein zweites und so weiter, sodass man die Aussagen so umparametrisiert, dass sie letztendlich doch durch die natürlichen Zahlen beschrieben werden. Hier werden die Aussagen (also die Dominosteine) in eine Reihenfolge gebracht.

Endlich viele Aussagen: Es könnte sein, dass lediglich endlich viele Aussagen gegeben sind: wir bezeichnen diese mit P(0) bis P(N) für eine natürliche Zahl N. Dann führen wir den Induktionsschritt von P(n) auf P(n+1) nur für n<N durch. Hier ist einfach die Reihe von Dominosteinen endlich.

Induktion mit erweiterter Induktionsvoraussetzung: Seien Aussagen P(n) für alle natürlichen Zahlen n gegeben. Wenn P(0) wahr ist (dies ist der Induktionsanfang) und wenn für jedes n die Aussagen von P(0) bis P(n) die Aussage P(n+1) implizieren (dies ist der Induktionsschritt), dann sind alle Aussagen P(n) wahr.

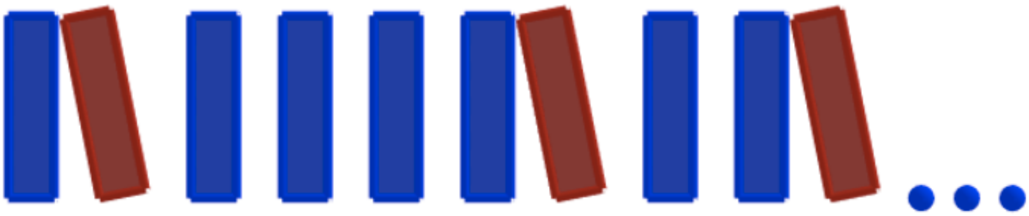
Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Eine Visualisierung für die Induktion mit erweiterter Induktionsvoraussetzung ist, Dominosteine mit wachsender Größe zu nehmen. Hier reicht also der Schwung aller vorherigen Dominosteine aus, um den nächsten Dominostein umzukippen.



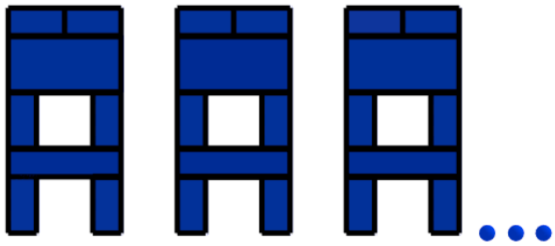
Rückwärts-Induktion: Seien Aussagen P(n) gegeben, wobei n eine natürliche Zahl ist. Sei T eine unendliche Teilmenge der natürlichen Zahlen, und seien die Aussagen P(t) für alle t in T wahr (diese Fälle ergeben den Induktionsanfang). Wenn für jedes n>0 aus der Aussage P(n) die Aussage P(n-1) folgt (dies ist der Rückwärts-Induktionsschritt), dann sind alle Aussagen P(n) wahr.

Hier werden alle Dominosteine der Reihe, die die Aussagen P(t) mit t in der Teilmenge T repräsentieren, rückwärts angetippt. Alle vorherigen Dominosteine fallen um, und da T unendlich ist, fallen sämtliche Dominosteine der Reihe.



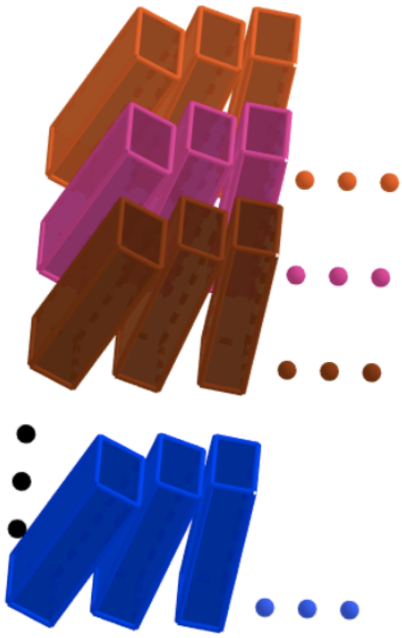
Partition-Induktion: Seien Aussagen P(s) gegeben, wobei s zu einer unendlichen Menge S gehört. Wir teilen S in Teilmengen T(n) ein, wobei n die natürlichen Zahlen durchläuft. Jedes Element von S ist also in genau einer der Teilmengen T(n) enthalten. Nehmen wir an, dass P(s) für alle s in T(0) wahr ist (dies ist der Induktionsanfang). Für alle n nehmen wir auch folgendes an: wenn P(s) für alle s in T(n) wahr ist, dann ist P(s) für alle s in T(n+1) wahr (diese ist der Induktionsschritt). Dann sind alle Aussagen P(s) wahr.

In dieser Variante fassen wir durch die Teilmengen der Partition Fälle zusammen. Man kann sich eine Reihe von Türmen von Dominosteinen vorstellen, die durch den Dominoeffekt vollständig in sich zusammenfallen.

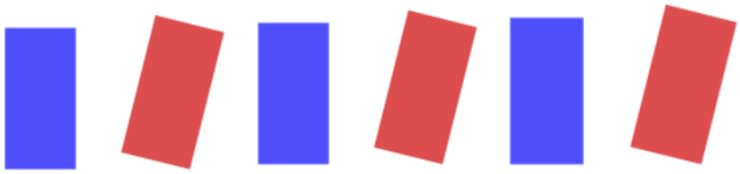


Sprünge-Induktion: Seien Aussagen P(n) gegeben, wobei n eine natürliche Zahl ist. Sei k>0 eine natürliche Zahl. Nehmen wir an, dass die Aussagen P(0) bis P(k-1) wahr sind (wir haben hier k Aussagen als Induktionsanfang). Nehmen wir auch an, dass für alle n die Aussage P(n) die Aussage P(n+k) impliziert (wir haben hier einen Sprung um k im Induktionsschritt). Dann sind alle Aussagen P(n) wahr.

Wir können uns diese Induktionsvariante so vorstellen: Es gibt k Reihen von Dominosteinen, und den nächsten Dominostein in einer Reihe zu erreichen bedeutet, um k Stellen in der üblichen Anordnung weiter zu springen.



Fallunterscheidung im Beweis des Induktionsschritt: Es kann z.B. vorkommen, dass man im Induktionsschritt von P(n) zu P(n+1) zwischen n gerade und n ungerade unterscheidet. Man kann sich eine Fallunterscheidung so vorstellen, dass in der Reihe von Dominosteinen nicht alle Steine auf die gleiche Weise umfallen (in der folgenden Abbildung sind die Dominosteine von oben dargestellt).



Zusammenfassung: Die in diesem Artikel dargestellten Visualisierungen der Induktionsvarianten sind nicht verbreitet (und möglicherweise neu). Sie können aber ein besseres Verständnis schaffen. Der Phantasie sind hier keine Grenzen gesetzt, eine Intuition mit dem Dominoeffekt aufzubauen.

Literatur

Andreescu, T. & Crisan V. (2017). *Mathematical Induction: A Powerful and Elegant Method of Proof.* London: XYZ Press.

Gunderson, D. S. (2010). *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications.* London: CRC Press.