Felicitas PIELSTICKER, Siegen

Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken – Begriffsbildung als charakteristische mathematische Tätigkeit

Motivation und Einleitung

„Die Grundseite muss immer unten sein“

Das obige Schülerzitat stammt aus einer Unterrichtssituation einer Mathematikstunde zum Thema Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken, einer 8. Klasse einer Sekundarschule in NRW. Wie in dem Schülerzitat dargestellt, beschäftigt sich ein Schüler, der hier beschriebene Schüler Paul (Name geändert), mit dem Begriff Grundseite im Rahmen der Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken. Paul diskutiert in seinem Mathematikunterricht zur Flächenberechnung von Dreiecken mit seinem Mitschüler Manuel (Name geändert) über den Begriff Grundseite. In der in diesem Beitrag untersuchten Unterrichtsstunde hatten die Schülerinnen und Schüler den Arbeitsauftrag, verschiedene Dreiecke (mindestens drei) frei auf einem Zeichenblatt zu skizzieren, Höhe und Grundseite zu messen und anschließend mithilfe der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus ihrem Mathematikbuch (Zahlen und Größen: Wennekers, 2015), den jeweiligen Flächeninhalt der Dreiecke zu bestimmen. Die Formel war bereits in der vorherigen Unterrichtsstunde mit Bezug zur Definition aus dem Schulbuch besprochen worden. In dem Schulbuch heißt es: „Für die Flächeninhaltsberechnung eines Dreiecks benötigt man die Länge einer der drei Dreiecksseiten (Grundseite g) und die Länge der zugehörigen Höhe h_g. Für den Flächeninhalt eines Dreiecks gilt: $A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ “ (Wennekers, 2015, S. 114)

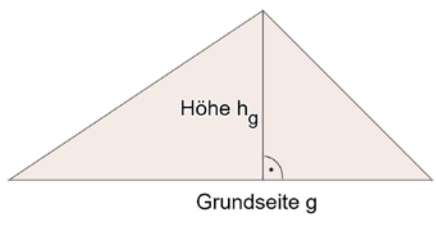


Abb. 1: Darstellung zur obigen Definition aus dem Schulbuch der Klasse

Paul und Manuel arbeiteten gemeinsam und wollten den Flächeninhalt ihres zuerst skizzierten Dreiecks bestimmen. Sie diskutierten dann darüber, welche Dreiecksseite nun als Grundseite und welche Dreieckseite ihres skizzierten Dreiecks nun als Höhe auszumachen sei. Dabei hatten die beiden Schüler jeweils eine unterschiedliche Dreiecksseite als Grundseite ausgewählt und unterschiedliche Ergebnisse für den Flächeninhalt berechnet.

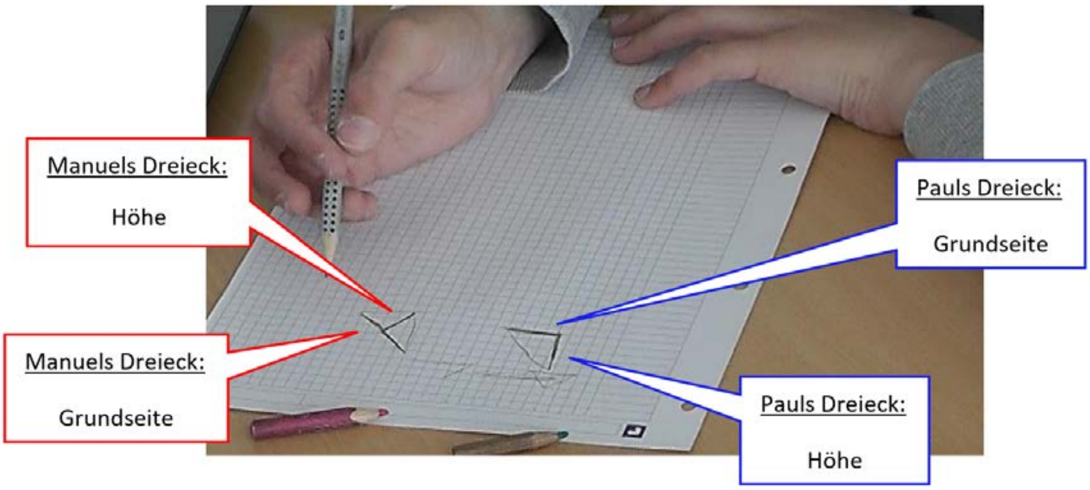
Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Theoretische Aspekte der Beschreibung

Mithilfe des zunächst deskriptiv gedachten, im Sinne jüngerer Studien (Pielsticker, 2020) aber auch zur Strukturierung von Unterricht genutzten, wissenschaftstheoretischen Ansatzes empirischer Theorien (Schoenfeld, 1985; Struve, 1990; Burscheid & Struve, 2009; Witzke, 2009; Schlicht, 2016; Schiffer, 2019; Stoffels, 2020; Pielsticker, 2020) lassen sich Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern beschreiben.

Beschreibung des Fallbeispiels – Paul und Manuel

Manuel und Paul diskutieren in folgender Situation:



		markiert, einmal die Grundseite, einmal die Höhe) dass –
01:22	I	ja –
01:23	Paul	– das hier die Grundfläche is *(malt die Seitenlänge wie beschrieben nach)* –, und halt –, das hier die Höhe', *(nun malt er eine weitere Seitenlänge nach und zeichnet die entsprechende Höhe ein die senkrecht auf dieser Seitenlänge steht)* aber Manuel hat gesacht dass das die Grundfläche is und, das die Höhe.
01:29	I	*(schwenkt beide Hände in der Luft hin und her)* okay., was soll das heißen., also –, wo's wo is euer Problem.
01:35	Paul	*(zeigt auf die Skizze)* wo, was die Grundseite is.
01:37	I	okay. .. und das is, nich egal'
01:44	Paul	also, es is zwar nich egal, die muss immer unten sein aber das Ergebnis is trotzdem das Gleiche.

Abb. 2: Deutungskonflikt der beiden Schüler und anschließendes Unterrichtsgespräch mit der Lehrperson (Pielsticker, 2020)

In Abb. 2 stellt Paul einen Deutungskonflikt von ihm und Manuel wiederholt einer Lehrperson dar. Manuel wählt das Paar aus Grundseite und Höhe entsprechend des in Abb. 2 rot markierten Dreiecks und Paul entsprechend des anderen blau markierten Dreiecks. Als die Lehrperson nachhakt, entsteht das dargestellte Unterrichtsgespräch (vgl. Abb. 2). Interessant ist, dass Paul als Problem ausmacht, „was die Grundseite is“. Als die Lehrperson nachfragt, ob dies nicht egal sei, antwortet Paul damit, dass dies zwar nicht egal sei und diese immer unten sein müsse, das Ergebnis aber trotzdem das Gleiche sei. Warum muss die Grundseite nun für Paul immer unten sein? Was meint er damit, dass das Ergebnis trotzdem gleich sei?

Zeichnet Paul ein Dreieck, so konnte zuvor im Unterricht beobachtet werden, folgte dies einer nahezu standardisierten Abfolge von Handlungsschritten. Ein entscheidendes Kriterium dabei stellt die Orientierung dar, insofern, dass er sein Zeichenblatt beim Zeichnungsprozess auf bestimme Weise orientiert: So wird das Lineal zunächst an der unteren Kante des Zeichenblattes orientiert und über diese Referenzlinie die erste Dreiecksseite parallel zur Zeichenblattunterkante konstruiert. Auf diese Weise kann auch die Höhe als Parallele zur seitlichen Kante des Zeichenblattes konstruiert werden. Im Schulbuch der beiden betrachteten Schüler fällt auf, dass hier Dreiecke häufig mit einer Dreiecksseite parallel zur Buchunterkante orientiert sind (Wennekers, 2015, bspw. S. 114).

Um Paul die Möglichkeit zu geben, sein Wissen über den Begriff Grundseite weiterzuentwickeln und eventuell noch einmal zu hinterfragen, gibt die Lehrperson Paul verschiedene Dreiecks-Plättchen und orientiert diese (scheinbar) willkürlich im Raum. Mithilfe dieses neuen Kontextes versucht die Lehrperson bei Paul einen kognitiven Konflikt zu erzeugen und so eine Wissensentwicklung zu erreichen. Paul hält jedoch zunächst an seiner Theorie über Zeichenblattfiguren fest und nutzt die Dreiecks-Plättchen entsprechend seiner Zeichenblattfiguren (vgl. Abb. 3, Bild 1).

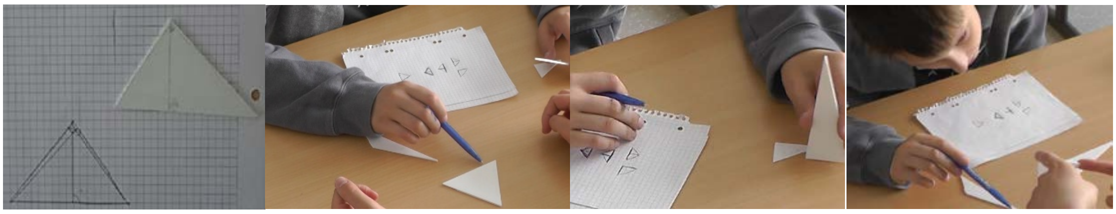


Abb. 3: *Bild 1 (von links)* Dreiecks-Plättchen, *Bild 2* Pauls erster Lösungsversuch, *Bild 3* zweiter Lösungsversuch, *Bild 4* dritter Lösungsversuch (Pielsticker, 2020)

Anschließend nimmt die Lehrperson die Dreiecks-Plättchen auf und legt eines der Plättchen auf die Tischoberfläche, um Paul nach der Grundseite zu fragen. Paul rückt das Dreiecks-Plättchen sofort „zurecht“, so dass dieses mit einer Dreiecksseite parallel zur Tischkante orientiert ist und wählt wie in Abb. 3, Bild 2 dargestellt, die zum ihm und untenliegende Dreiecksseite als Grundseite. Paul antizipiert, dass die Lehrperson damit nicht zufrieden ist und bietet einen zweiten Lösungsversuch an (vgl. Abb. 3, Bild 3). Er stellt das Dreiecks-Plättchen auf die Tischoberfläche – parallel zum Boden – auf und sagt: „Die Grundseite ist das worauf es steht“ (Schülerzitat). Anschließend möchte die Lehrperson einen weiteren Impuls setzen und hält das Dreiecks-Plättchen nun (vgl. Abb. 3, Bild 4) auf eine Weise, dass keine der Dreiecksseiten parallel zu einer der Raumachsen ist. Daraufhin verändert Paul seine Sicht auf das Plättchen und wählt so die Dreiecksseite als Grundseite, die *ihm* nun parallel zu seiner Sichtachse erscheint. Orientierung im Raum – als empirisches Argument – scheint für Paul wesentliches Kriterium für die Definition der Grundseite eines Dreiecks zu sein.

Mit Blick auf das dargestellte Fallbeispiel erscheint uns Begriffsbildung als eine gewinnbringende charakteristische Tätigkeit für den Mathematikunterricht. Dazu gehören ein Aushandeln von Begriffen (z.B. dem Begriff der Grundseite) und ein Diskutieren von Deutungskonflikten, dem in Lernumgebungen gezielt Raum gegeben werden sollte. Aushandlungsprozesse von Deutungskonflikten sollten im Mathematikunterricht zugelassen und sogar angeregt werden. Auch auf diese Weise wird es Schülerinnen und Schülern möglich Mathematik im Schulunterricht als etwas Gewordenes, sich Entwickelndes und eben Prozesshaftes erfahren zu können.

Für weitere Informationen siehe Pielsticker, 2020.

Literatur

Burscheid, H. J. & Struve, H. (2009). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktionen. Ein Beitrag zu ihrer Grundlegung.* Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck.* Wiesbaden: Springer.

Schiffer, K. (2019). *Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra*. Wiesbaden: Springer.

Schlicht, S. (2016). *Zur Entwicklung des Mengen- und Zahlbegriffs.* Wiesbaden: Springer.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Stoffels, G. (2020). *(Re-)konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von einer empirisch-gegenständlichen zu einer formal-abstrakten Auffassung. Eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und individueller Entwicklungen mathematischer Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim Übergang Schule Hochschule*. Siegen: universi. (Erscheint 2020)

Struve, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim: BI-Wiss.-Verlag.

Wennekers, U. (2015). *Zahlen und Größen 8. Nordrhein-Westfalen*. Berlin: Cornelsen.

Witzke, I. (2009). *Die Entwicklung des Leibnizschen Calculus. Eine Fallstudie zur Theorieentwicklung in der Mathematik.* Köln: Franzbecker.