

Kim QUABECK, Dortmund & Kirstin ERATH, Dortmund

Individuelle Strukturierungen zur Gleichwertigkeit von Brüchen

Lernende haben bereits vor der Phase des Erkundens im Unterricht individuelle Vorstellungen zu einem mathematischen Lerngegenstand (Lengnink, Prediger & Weber, 2011). Bei der Bearbeitung sinnstiftender Kontexte aktivieren sie diese mehr oder weniger mathematisch tragfähigen Strukturierungen (Lengnink et al., 2011; Prediger, 2011a). Dieser Beitrag untersucht und ordnet die individuellen Strukturierungen von Lernenden aus der Vorschauperspektive. Formuliert wird die Forschungsfrage daher gegenstandsspezifisch für ein reichhaltiges Kontextproblem zur Gleichwertigkeit von Brüchen: *Welche individuellen Strukturierungen aktivieren die Lernenden zum Vergleichen von Trefferquoten mit ungleichen Bezugsgrößen?*

Individuelle Strukturierungen zum Vergleichen von Trefferquoten

Für das Nacherfinden des Konzepts der relativen Häufigkeiten haben sich Lernarrangements mit Trefferkontext bewährt (Prediger, 2011a, 2011b). Auch das hier zugrundeliegende Kontextproblem (Abb. 1) fordert die Lernenden heraus, eine faire Möglichkeit des Vergleichens im Rahmen eines Torwandschießens zu finden.

In der Klasse 7c) wurde in drei Gruppen auf eine Torwand geschossen.
Die Gruppe der Jungen hat 4 von 5 Schüssen getroffen.
Die Gruppe der Mädchen hat 8 von 10 Schüssen getroffen.
Die Lehrergruppe hat 20 Mal geschossen und 4 Mal nicht getroffen.

Abb. 1: „Wer hat besser geschossen“ (vgl. Wessel, Prediger & Kuzu, 2018)

Beim Auseinandersetzen mit Vergleichswegen im Trefferkontext aktivieren die Lernenden individuelle Vorstellungen, um sich die lebensweltliche Situation selbstständig zu strukturieren, begegnen dem mathematischen Gegenstand also aus Vorschauperspektive. Um diese individuellen Vorstellungen für den Lernprozess fruchtbar zu machen ist es notwendig, die unterschiedlichen Strukturierungen zu rekonstruieren (Lengnink et al., 2011; Prediger, 2011a). In Vorschauperspektive wurden bereits individuelle Wege des Vergleichens herausgearbeitet (Prediger, 2011a), jedoch individuelle Strukturierungen der Umwandlungsprozesse noch nicht genauer untersucht. Für die Systematisierung der individuellen Strukturierungen wurde eine Analysematrix entwickelt (Abb. 2). In den Spalten werden die Bezugsaspekte (Treffer, Fehltreffer, Versuche) der Lernenden mit dem jeweiligen Fokus (absolut oder relativ) beim Vergleichen dargestellt, wie sie ähnlich auch Prediger

(2011a) beschrieben hat. Die Zeilen enthalten die nun hinzukommenden Kategorien der individuellen Strukturierungen des Umwandlungsprozesses zwischen Bezugsaspekten.

| Umwandlungsprozess \ Bezugsaspekt und Fokus | Absolute Treffer | Absolute Versuche | Absolute Fehltreffer | Fehltreffer relativ an Versuchen | Treffer relativ an den Versuchen |
|--|------------------|-------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| Kein Umwandlungsprozess | Sandra (Z35) | | | | Elsa (Z35) |
| Umwandlungsprozess nicht oder indirekt quantifiziert | | | | Liane (Z10) | |
| Gleiche Differenz erhalten | | | Elsa (Z23) | | |
| Das Gleiche hinzufügen | | | | | Jules (Z40) |
| Mit gleichem Vervielfachen | | | | Fridolin (Z15) | |

Abb. 2: Matrix der individuellen Strukturierungen

Projektkontext

Die zugrundeliegenden Daten stammen aus bislang 30 ausgewerteten Kleingruppen von 3 bis 6 Lernenden, die im Rahmen der Projekte MuM-MESUT 1 und 2 in (schwachen) siebten bzw. (starken) fünften Klassen an Schulen des Ruhrgebiets gefördert wurden (Prediger & Wessel, 2018). Die qualitative Auswertung erfolgt durch deduktive Kategorienbildung und induktive Kategorienverfeinerung anhand der Transkripte der Aufgabenbearbeitungen zum Trefferkontext (insgesamt etwa 900 Minuten Videomaterial).

Empirischer Einblick

Im Folgenden werden fünf Lernendenäußerungen aus verschiedenen Gruppen vorgestellt, um vor allem die Kategorien der Zeilen der Matrix, also die Umwandlungsprozesse, zu illustrieren. Sandras Idee steht beispielhaft für individuelle Strukturierungen, die mit *absoluten Treffern* vergleichen:

35 Sandra Ich glaub der Lehrer, weil die 16 Tore insgesamt geschossen haben.

In Sandras Aussage ist dabei *kein Umwandlungsprozess* erkennbar, da sie sich lediglich auf einen Aspekt (*absolute Treffer*) bezieht und keine Beziehung zu anderen Ergebnissen herstellt. Die *Fehltreffer relativ an den Versuchen* als Bezugsaspekt nutzen Lernende wie Liane (Zeile 10). Im Gegensatz zu Sandra in Zeile 35 strukturiert sie diese bereits als Trefferquote, bezieht den Umwandlungsprozess also auf die *Treffer relativ an den Versuchen*, visualisiert an der Streifentafel.

10 Liane Keiner hat gewonnen. Weil wenn man das in der Streifentafel erkennt sind die Stücke nur kleiner geworden, aber gleichgeblieben.

Sie vergleicht eigenständig die gleich langen Teile an der Streifentafel vertikal. Gleichzeitig erkennt Liane die Notwendigkeit einer Umwandlung der Bezugsaspekte ineinander, indem sie die sich verändernde Struktur der Stücke in den Streifen erklärt (nur kleiner geworden, aber gleichgeblieben). Welche Beziehung genau zwischen den Aspekten besteht, wird durch die *indirekte Quantifizierung* jedoch nur im Ansatz expliziert.

Elsa bezieht sich in Zeile 23 auf die Darstellung in der Streifentafel und verbalisiert einen Vergleich unter Bezugnahme auf die *absoluten Fehltreffer*:

- 23 Elsa Hier haben wir ja 4 von 5. Und das ist da ist ja einer Unterschied [*deutet auf nicht markiertes Stück der Jungengruppe in der Streifentafel*]. Also wenn wir jetzt 10 nehmen würden, wäre da ja einer Unterschied. Also wären es 9.

Sie stellt damit eine Beziehung zwischen Treffern und Versuchen her. Obwohl sie die *absoluten Fehltreffer* bereits selbstständig in einem Bruchstreifen visualisiert hat, setzt sie diese nicht in Relation zu den Versuchen (gleiche Länge in der Streifentafel). Vielmehr expliziert sie den Umwandlungsprozess, indem sie die *gleiche Differenz erhält* (einer Unterschied) und auf die weiteren Ergebnisse überträgt.

Individuelle Strukturierungen von Lernenden wie Jules (Zeile 40) geben Aufschluss über die zugrundeliegende Operation beim Umwandeln:

- 40 Jules Es ist Gleichstand. Immer wenn man Zähler und Nenner des Vorherigen halt addiert, kommt das Ergebnis des nächsten raus [...]. Ja halt ich mein, z.B. von den Jungs $\frac{4}{5}$ muss man halt addieren, ist das Ergebnis des nächsten.

Er fokussiert die *Treffer relativ an den Versuchen* und *fügt das Gleiche hinzu*, also jeweils das gleiche relative Ergebnis. Im Spezialfall des Trefferkontexts ist es so möglich, alle Ergebnisse zu erreichen.

Fridolins Erläuterungen (Zeile 15) zugrunde liegt hingegen ein relationaler Fokus auf die *Fehltreffer relativ an den Versuchen*:

- 15 Fridolin Weil die Jungen haben 1 Schuss nicht getroffen von 5. Und das Doppelte wären 2 Schüsse von 10 nicht getroffen und das haben die Mädchen ja. Also wären die schon einmal gleich denke ich mal. Und wenn die 2 von 10 nicht treffen und 10 ist das, immer doppelt ist 20. Und das Doppelte von 2 ist 4 Und die Lehrer haben 4 Mal nicht getroffen also haben die alle gleich. [...] Also alle 5 Schüsse trifft einer nicht.

Er wandelt durch multiplikatives Hochrechnen um, welches dem *mit gleichem Vervielfachen* entspricht. Dies erhält die Verhältnisse der Fehltreffer relativ an den Versuchen.

Zusammenfassung und Ausblick

Die empirischen Einblicke zeigen, dass sich die individuellen Strukturierungen nicht nur in den Bezugsaspekten unterscheiden (wie bei Prediger, 2011a analysiert), sondern vor allem auch darin, wie Lernende die Ergebnisse ineinander überführen. Das rangiert von nicht vorhandenen (Zeile 35, Sandra) bis hin zu korrekten Quantifizierungen (Zeile 15, Fridolin) der Umwandlungsprozesse. Daher sollten auch die Umwandlungsprozesse bei der Analyse fokussiert werden. Rekonstruiert werden so individuelle Ideen von Lernenden zur mathematischen Operation beim Herstellen von Beziehung zwischen den Aspekten im Umwandlungsprozess.

In den nächsten Arbeitsschritten werden die individuellen Strukturierungen mit den mathematisch tragfähigen, präskriptiven Konzepten zusammengebracht. Relevant sind aus der Rückschauerspektive die Grundvorstellung des Anteils eines Ganzen für Brüche selbst sowie das Herstellen der korrekten Beziehung zwischen zwei Brüchen, also die Grundvorstellung des Vergrößerns und Verfeinerns (Malle, 2004; Prediger, 2011b). Dies eröffnet die Möglichkeit, die individuellen Strukturierungen in Lehr-Lern-Prozessen auf Möglichkeiten des produktiven Anknüpfens in der Interaktion zu untersuchen. Dafür bietet die Matrix eine wichtige Systematisierungsgrundlage.

Dank: Das Projekt MESUT 2: Mathematisches Verständnis Entwickeln mit Sprachunterstützung (Projektleitung Prediger & Erath, PR662/14-2 & ER880/1-2) wird durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft gefördert. Wir danken Susanne Prediger für Kooperation und Beratung.

Literatur

- Lengnink, K., Prediger, S. & Weber, C. (2011). Lernende abholen, wo sie stehen. Individuelle Vorstellungen aktivieren und nutzen. *Praxis der Mathematik*, 53(40), 2–7.
- Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren*, 123, 4–8.
- Prediger, S. (2011a). Anknüpfen, Konfrontieren, Gegenüberstellen. Strategien zur Weiterarbeit mit individuellen Vorstellungen am Beispiel relativer Häufigkeiten. *Praxis der Mathematik*, 53(40), 8–13.
- Prediger, S. (2011b). Vorstellungsprozesse initiieren und untersuchen. Einblicke in einen Forschungsansatz am Beispiel Vergleich und Gleichwertigkeit von Brüchen in der Streifentafel. *Der Mathematikunterricht*, 57(3), 5–14.
- Prediger, S. & Wessel, L. (2018). Brauchen mehrsprachige Jugendliche eine andere fach- und sprachintegrierte Förderung als einsprachige? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 21(2), 361–382. <https://doi.org/10.1007/s11618-017-0785-8>
- Wessel, L., Prediger, S. & Kuzu, T. (2018). Brüche verstehen und vergleichen. Sprach- und fachintegriertes Fördermaterial. <https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/100>