Frank REINHOLD, München, Stefan HOCH, München &
Kristina REISS, München

Der Natural Number Bias und die Verarbeitung der Größenordnung von Bruchzahlen

Einleitung

Studien haben gezeigt, dass viele Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten beim Erlernen von rationalen Zahlen – insbesondere Brüchen – zu kämpfen haben (Padberg & Wartha, 2017; siehe auch Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015; Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Zwei Hauptschwierigkeiten scheinen darin zu bestehen, dass die Schülerinnen und Schüler (1) beim Größenvergleich rationaler Zahlen zum Teil auf Konzepte natürlicher Zahlen zurückgreifen – was in der Literatur als *Natural Number Bias* (NNB) bezeichnet wird – und (2) nicht ausreichend in der Lage sind, die Größenordnung von Bruchzahlen zu verarbeiten.

Schülerinnen und Schüler greifen beim Größenvergleich zweier Brüche oft auf einfache Vergleiche der natürlichen Zahlenkomponenten – Zähler und Nenner – zurück und berücksichtigen nicht die tatsächlichen Bruchzahlen. Dieses Vorgehen führt folglich zu korrekten Antworten bei „kongruenten“ Aufgaben (d. h. bei denen der größere Bruch aus den größeren natürlichen Zahlen besteht, z. B. 7/8 > 2/3), und zu falschen Antworten bei „inkongruenten“ Aufgaben (d. h. bei denen der größere Bruch aus den kleineren natürlichen Zahlen besteht, z. B. 3/5 < 2/3). In zahlreichen Studien konnte gezeigt werden, dass Menschen genauer (z. B. Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) und/oder schneller (z. B. Van Hoof, Lijnen, Verschaffel & Van Dooren, 2013) beim Lösen kongruenter Aufgaben als beim Lösen inkongruenter Aufgaben sind – dieser NNB bei Menschen unterschiedlicher Alters- und Erfahrungsgruppen jedoch unterschiedlich ausgeprägt sein kann (DeWolf & Vosniadou, 2011; Gómez, Silva & Dartnell, 2017; Obersteiner, Van Hoof & Verschaffel, 2013).

Die Fähigkeit zur Verarbeitung der Größenordnung von Bruchzahlen umfasst das Verständnis dafür, einen Bruch als ein einzelnes ganzheitliches Symbol zu verstehen, das einen bestimmten Zahlenwert repräsentiert. Um diese Fähigkeit zu prüfen, werden häufig symbolische Größenvergleichsaufgaben von Brüchen verwendet (Schneider & Siegler, 2010) und auf einen vorliegenden „Distanzeffekt“ untersucht: Zeigt sich ein Zusammenhang zwischen der Distanz der beiden Brüche und der Schwierigkeit der Aufgabe (d. h. je kleiner der numerische Abstand zwischen den beiden zu vergleichenden Brüchen, desto schwieriger die Aufgabe), so geht man davon aus,

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

dass die betreffende Person für den Vergleich auf die Größenordnung der Brüche zurückgreift. Ein solcher Distanzeffekt kann sowohl hinsichtlich der Genauigkeit (z. B. Sprute & Schläfe, 2011) als auch der Reaktionszeit (z. B. Meert et al., 2010) vorliegen.

Obwohl beide Schwierigkeiten – NNB und Schwierigkeiten bei der Verarbeitung der Größenordnung von Bruchzahlen – in der Literatur diskutiert wurden, gibt es bisher kaum empirische Erkenntnisse zum Zusammenhang der beiden Schwierigkeiten bei Schülerinnen und Schülern. Darüber hinaus wurden in den meisten früheren Studien Stichproben als einzelne Gruppe betrachtet, während personen-zentrierte Ansätze über spezifische Schülergruppen und deren Profile selten sind. Diese Studie untersucht solche Profile bezüglich des NNB beim Größenvergleich von Bruchzahlen im Zusammenhang mit der Fähigkeit die Größenordnung von Bruchzahlen zu verarbeiten.

Methode

Wir analysieren Daten von $N = 234$ Mittelschülerinnen und Mittelschülern (42% weiblich) der 6. Klasse. Sie lösten neun kongruente Aufgaben ($\alpha = 0{,}87$) und elf inkongruente Aufgaben ($\alpha = 0{,}94$) zum Größenvergleich von Brüchen mit einstelligen Zählern und Nennern. Den Schülerinnen und Schülern wurden alle Aufgaben auf einem iPad präsentiert.

Wir haben eine Clusteranalyse auf Basis dreier Dimensionen durchgeführt: Lösungsrate bei inkongruenten Aufgaben, Lösungsrate bei kongruenten Aufgaben und durchschnittliche Bearbeitungszeit. Anschließend haben wir generalisierte lineare Mischmodelle (logistische Regression) verwendet, um Distanzeffekte in den gefundenen Clustern zu untersuchen.

Ergebnisse und Diskussion

Die Schülerinnen und Schüler im *Natural Number Biased*-Profil zeigten einen typischen NNB (bessere Leistung bei kongruenten als bei inkongruenten Aufgaben, s. Abb.), während die Schülerinnen und Schüler im *Reversed Biased*-Profil einen NNB in die entgegengesetzte Richtung zeigten (bessere Leistung bei inkongruenten als bei kongruenten Aufgaben, s. Abb.). Sie scheinen Bruchzahlen dann als größer zu interpretieren, wenn ihre Komponenten im Allgemeinen kleiner sind (in Übereinstimmung mit Rinne et al., 2017). Im Gegensatz dazu zeigten die Schülerinnen und Schüler im *Non-Biased*-Profil keinen NNB in ihren Antwortmustern, sondern überdurchschnittliche – aber niedrige – Lösungsraten bei kongruenten und inkongruenten Bruchvergleichsaufgaben (Abb.).

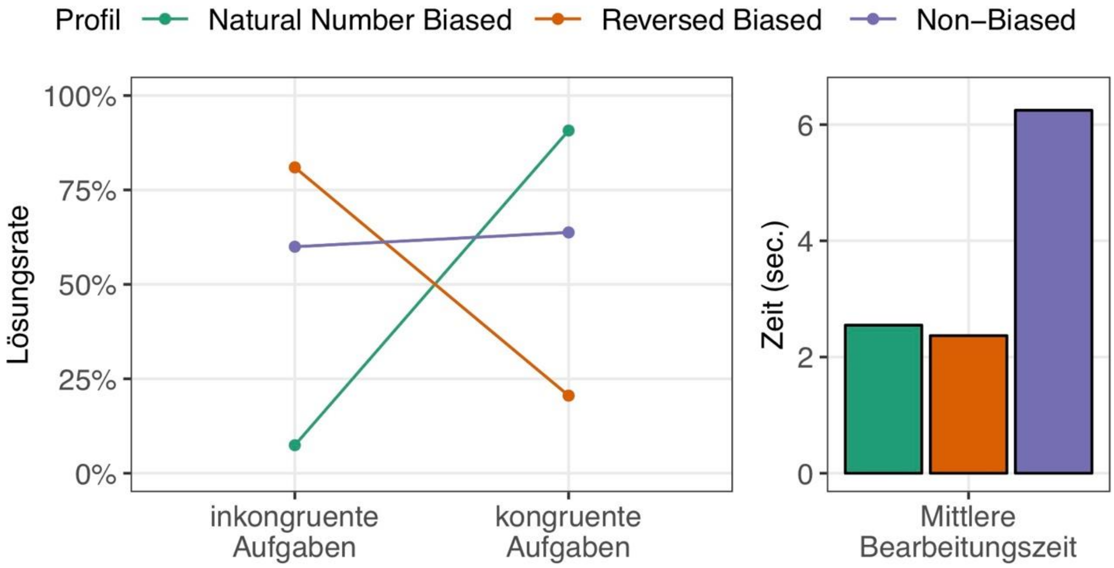

Abb.: Clusterzentren der drei gefunden Schülerprofile

Schülerinnen und Schüler im *Natural Number Biased*-Profil und *Reversed Biased*-Profil zeigten keinen Distanzeffekt in den Vergleichsaufgaben, während ihn Lernende im *Non-Biased*-Profil zeigten. Für sie waren die Vergleiche umso einfacher, je größer der Abstand zwischen den Brüchen war. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der theoretischen Annahme, dass Schülerinnen und Schüler, die einem NNB unterliegen, Brüche als zwei einzelne Symbole verarbeiten und nicht als ein Symbol für eine einzelne Zahl.

Die von uns gefunden Profile können die Ergebnisse vorhergehender Studien mit personenzentrierten Ansätzen weitgehend replizieren (Gómez & Dartnell, 2019; González-Forte, Fernández, Van Hoof & Van Dooren, 2019; Rinne, Ye & Jordan, 2017).

Es erscheint bemerkenswert, dass Lernende im *Natural Number Biased*-Profil und im *Reversed Biased*-Profil wesentlich schneller antworteten als Schülerinnen und Schüler im *Non-Biased*-Profil. Wir verstehen dies als Indikator dafür, dass sich Lernende in den beiden Profilen mit NNB der Schwierigkeiten beim Größenvergleich von Brüchen nicht bewusst sind: Es ist plausibel, dass Antworten auf Basis der Größenordnung von Zähler und Nenner als natürlichen Zahlen schneller funktioniert als die Beantwortung auf der Grundlage der Größenordnung von Bruchzahlen.

Danksagung

Diese Arbeit ist Teil des Projekts *ALICE:Bruchrechnen*, das von der Heinz Nixdorf Stiftung gefördert wurde (Referenz: 12502). Wir danken Bernhard Werner und Jürgen Richter-Gebert für ihren Beitrag zum Projekt. Die Studie wurde vom staatlichen Schulamt München genehmigt (Referenz:

SchR III / Erh106/1). Weiter danken wir allen Schülerinnen und Schülern sowie ihren Lehrkräften für die Teilnahme an der Studie.

Literatur

DeWolf, M. & Vosniadou, S. (2011). The whole number bias in fraction magnitude comparisons with adults. In L. Carlson, C. Hoelscher & T. F. Shipley (Hrsg.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Cognitive Science Society* (S. 1751–1756). Boston: Cognitive Science Society.

Gómez, D. & Dartnell, P. (2019). Middle Schoolers' Biases and Strategies in a Fraction Comparison Task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(6), 1233–1250.

Gómez, D., Silva, E. & Dartnell, P. (2017). Mind the Gap: Congruency and Gap Effects on Engineering Students' Fraction Comparison. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh & B. H. Choy (Hrsg.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 353–360). Singapore: PME.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. & Van Dooren, W. (2019). Exploring Students' Reasoning About Fraction Magnitude. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Hrsg.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S. 272–279). Pretoria: PME.

Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221.

Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M.-P. (2010). Comparing the magnitude of two fractions with common components: Which representations are used by 10- and 12-year-olds? *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(3), 244–259.

Obersteiner, A., Van Hoof, J. & Verschaffel, L. (2013). Expert mathematicians' natural number bias in fraction comparison. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 3, S. 393–400). Kiel: PME.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Berlin: Springer.

Rinne, L. F. Ye, A., & Jordan, N. C. (2017). Development of fraction comparison strategies: A latent transition analysis. *Developmental Psychology*, 53(4), 713–730.

Schneider, M. & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 36(5), 1227–1238.

Siegler, R. S., Thompson, C. A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4), 273–296.

Sprute, L. & Temple, E. (2011). Representations of Fractions: Evidence for Accessing the Whole Magnitude in Adults. *Mind, Brain, and Education*, 5(1), 42–47.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14(5), 453–467.

Van Hoof, J., Lijnen, T., Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2013). Are secondary school students still hampered by the natural number bias? A reaction time study on fraction comparison tasks. *Research in Mathematics Education*, 15(2), 154–164.