

Julia REY, Köln & Michael MEYER, Köln

Naturwissenschaftliche Denk- & Arbeitsweisen zur Initiierung mathematischer Begründungen

Einleitung

In diesem Beitrag werden naturwissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen zur Analyse mathematischer Erarbeitungsprozesse herangezogen. Im Speziellen wird darauf geachtet, inwiefern sich Begründungselemente innerhalb experimenteller Herangehensweisen auffinden lassen und inwiefern diese experimentellen Prozesse ein Beweisbedürfnis initiieren können.

Mathematische Begründungen und naturwissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen

Experimentelle Prozesse werden beschrieben, wenn z. B. an bestimmten Beispielen Hypothesen generiert werden (Meyer & Voigt, 2009; Philipp, 2013) und um ein Vertrauen in Hypothesen zu gewinnen (Pólya, 1962). Winter (1983) stellt heraus, dass ein objektives sowie subjektives Beweisbedürfnis bei Schüler*innen geweckt werden sollte. Ersteres bedeutet, dass die Schüler*innen erfahren, dass Mathematik auf Beweise angewiesen ist, und zweiteres, dass sie selber das Bedürfnis haben, mathematische Zusammenhänge zu beweisen. Zur Weckung eines Beweisbedürfnis könnten, so Winter, naturwissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen wie Messungen und Beobachtungen relevant werden. Jahnke (2009) nutzt die naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen, um eine lokale Ordnung anzubahnen. Aus Hypothesen werden Konsequenzen gezogen, die wiederum am Empirischen überprüft werden. Empirisch überprüft wird damit nicht nur die Konsequenz, sondern auch die ursprüngliche Hypothese. Der Zusammenhang zwischen Experimenten und Begründungen soll genauer untersucht werden.

Die experimentelle Methode der Naturwissenschaften

Kant (KrV B XIII bis B XIV) beschreibt das Arbeiten der Naturwissenschaften als ein ‚Hand in Hand gehen‘ mit theoretischen Überlegungen und empirischen Befunden. Dieser wissenschaftliche Prozess wird als experimentelle Methode bezeichnet (s. u. a. Reiners & Saborowski, 2017; Schwarz, 2009). Konkretisiert sei dies nachgehend an der Frage ‚*Warum schwimmt Eis auf Wasser?*‘, um naturwissenschaftliche Denk- und Arbeitsweisen herauszuarbeiten. Popper (1949, S. 44) stellt heraus, dass eine empirische Beobachtung durch eine *Fragestellung bzw. Hypothese* fokussiert sein muss. Dies lässt sich als erster Schritt der naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweise

innerhalb der experimentellen Methode verstehen. Das schwimmende Eis könnte ein überraschendes Phänomen sein, da u. a. die Erfahrung mit anderen Stoffen gemacht worden sein könnte, dass Dichte bei niedriger Temperatur zunimmt. Ist es vielleicht so, dass Eis eine geringere Dichte besitzt als das Wasser, auf dem es schwimmt? Dann sollte sich Wasser bei niedriger Temperatur ausdehnen. Diese Hypothese muss anschließend überprüft werden. Zur Überprüfung wird Wasser in ein geschlossenes Gefäß geschüttet und eingefroren (Temperatur variiert). Nach einiger Zeit kann beobachtet werden, dass sich das Gefäß aufbläht oder platzt. Es wird folglich ein Experiment als ein konkreter Eingriff in die Natur durchgeführt, indem Bedingungen gezielt verändert und konstant gehalten werden (Ströker, 1972, S. 308). Eine Beobachtung wird gemacht. Damit ergeben sich zwei weitere Denk- und Arbeitsweisen der Naturwissenschaften: *ein Experiment und eine Beobachtung*. Diese Beobachtung muss mit der anfänglichen Hypothese abgeglichen werden – eine empirische *Prüfung*: Die Dichte von Eis scheint geringer als die Dichte von Wasser zu sein. Dieses Phänomen muss erklärt werden in einer anschließenden Deutung (Stork, 1979, S. 48). Insgesamt ergeben sich somit fünf Schritte im Erkenntnisprozess als notwendige Denk- und Arbeitsweisen im Rahmen der experimentellen Methode.

Methodologie und Methode

Diese naturwissenschaftlichen Denk- und Arbeitsweisen werden zur Analyse von Interviewsituationen mit u. a. Studierenden des dritten Bachelorsemesters durchgeführt. Zur Analyse wurde ein interpretatives Paradigma herangezogen, wie es aus der Arbeitsgruppe Bauersfeld in der Mathematikdidaktik bekannt ist. Folgende Aufgabe (angelehnt an Schreiber, 1988, S. 156 f.) wurde u. a. von den Probanden*innen gelöst: *Stelle dir eine Fläche ohne Einbuchtungen vor. Die Fläche habe einen Umfang L , das heißt bei einem Rundgang längs der Randlinie müsstest Du einen Weg der Länge L zurücklegen. Wenn nun aber der Rundgang außerhalb der Fläche im immer konstant bleibenden Abstand a von dem Rand der Fläche verläuft, so entsteht ein Mehrweg. Wovon hängt dieser Mehrweg ab?*

Analyse

Die Studentinnen Silvia und Janna (Pseudonyme) beginnen ihre Bearbeitung mit einem Rechteck. Ihnen fällt nach ihrer Zeichnung eines Rechtecks mit entsprechendem Rundgang auf, dass die Ecken des Rundgangs abgerundet werden müssen und dass die Seiten der Figur in der Länge erhalten bleiben. Dies wird in folgender Zeichnung ersichtlich:

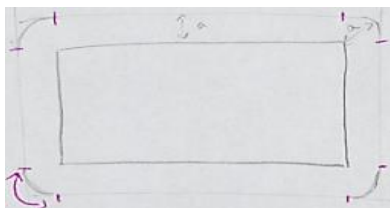


Abb. 1: Rundgang um ein Rechteck

Die Frage, die sich anschließt ist: „Was passiert an den Ecken der Figur?“

Silvia: aber das müsste doch eigentlich, guck mal. können wir ja davon ausgehen, dass das hier einfach ein Viertelkreis ist‘ (*zeigt auf die linke untere Ecke, s. Abb. 1*), du hast einen Viertelkreis- und a.

Janna: also a ist dann der Radius von diesem Kreis‘ oder‘

Silvia verbalisiert ihre Beobachtung. Die erste Zeichnung wird als Experiment zur Beantwortung der gestellten Frage herangezogen. Janna ergänzt die Situation mit theoretischen Überlegungen, nämlich dass a der Radius der Kreise sein könnte. Damit liefert sie sowohl eine Deutung der Situation als auch eine Hypothese für die folgenden Handlungen: Wenn an den Ecken der Figur Kreissegmente mit Radius a entstehen, dann ist der Mehrweg insgesamt der Umfang eines Kreises.

Es wird ein weiteres Experiment durchgeführt. Die Studentinnen zeichnen einen Kreis und einen ‚Rundgangkreis‘. Sie beobachten, dass sich die Radien der Kreise um a unterscheiden und berechnen dadurch die Umfangsdifferenz. Als Umfangsdifferenz sowohl für einen Kreis als auch für ein Rechteck geben die Studentinnen $2\pi \cdot a$ an. Sie haben damit ihre Hypothese sowohl geprüft als auch gedeutet bzw. erweitert um die konkrete Angabe des Umfangs. Die empirisch geprüfte und z. T. erklärte Hypothese wird weitergezogen auf Dreiecke. Hervorzuheben ist, dass die Studentinnen in dem nachfolgenden Ausschnitt eine Begründung herleiten wollen, indem sie beobachtete Elemente der vorherigen experimentellen Prozesse aufnehmen und mit theoretischem Wissen wie der Innenwinkelsumme im Dreieck ergänzen:

Janna: die Innenwinkel sind ja insgesamt hundertachtzig Grad‘ [...] aber da können wir keinen Schluss auf die die Winkel außen ziehen‘ [...] das müsste dann auch- die Außenwinkel müssten die Innenwinkel dann jeweils zu dreihundertsechzig Grad ergänzen. dreihundertsechzig mal drei sind also eh-

Folgende Rechnung wird von Janna ausgeführt: $3 \cdot 360^\circ = 1080^\circ$ im Dreieck; $1080^\circ - 180^\circ = 900^\circ$. Ihr Ziel ist es 360° als Differenz der Winkelfelder zu erhalten. Die fehlenden Komponenten (sechs 90° Winkel) erkennen die Studentinnen dann allerdings erst an einer erneuten Zeichnung (hier ein Experiment mit der Fragestellung: Beträgt die Umfangsdifferenz 360° ? s. Abb. 2) und ergänzen damit ihre Rechnung: $900^\circ - 540^\circ = 360^\circ$ Mehrweg.

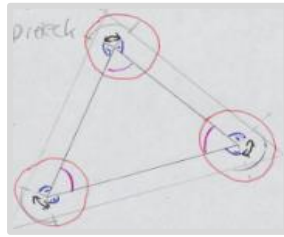


Abb. 2: Rundgang um ein Dreieck

Es kann von einer Theorieerweiterung gesprochen werden, da die Studentinnen den Umfang eines Kreises mit Radius a als Mehrweg erkennen und erklären können.

Fazit und Ausblick

An dieser Bearbeitung wird deutlich, dass sich bei der Realisierung einer experimentellen Methode bereits Begründungselemente in den experimentellen Prozessen finden lassen (im Beispiel: Radius a , gleicher Abstand um einen Punkt, Innenwinkelsumme usw.), die notwendig sind. Die Studentinnen erhalten aus den experimentellen Erarbeitungen einen Wunsch zu erklären, warum immer ein Kreis mit Radius a entsteht. Betont werden kann damit, dass das Wecken eines Beweisbedürfnisses auch ein Wecken eines Experimentierbedürfnisses bedeuten kann. Dieser Zusammenhang zwischen experimentellen Prozessen und dem Begründen soll weitergehend fokussiert werden. Dafür sollen unterschiedliche Arten der Nutzung von Theorien innerhalb experimenteller Prozesse herausgearbeitet werden.

Literatur

- Jahnke, H. N. (2009). Hypothesen und ihre Konsequenzen. Ein anderer Blick auf die Winkelsummensätze. *Praxis Mathematik* 51, 26-30.
- Kant, I. (2010). *Kritik der reinen Vernunft*. (J. Timmermann, Hrsg.). Hamburg: Meiner.
- Meyer, M. & Voigt, J. (2009). Entdecken, Prüfen und Begründen. Gestaltung von Aufgaben zur Erarbeitung mathematischer Sätze. *mathematica didactica* 32. 31-66.
- Pólya, G. (1962). *Mathematik und plausible Schliessen. Induktion und Analogie in der Mathematik* (Bd. 1). Basel: Birkhäuser.
- Popper, K. R. (1949). Naturgesetze und theoretische Systeme. In S. Moser (Hrsg.), *Gesetz und Wirklichkeit* (S. 43- 60). Innsbruck: Tyrolia.
- Schreiber, A. (1988). Mathematik als Experiment. In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis* (S. 154-176). Berlin: Cornelsen.
- Stork, H. (1979). Zum Verhältnis von Theorie und Empirie in der Chemie. *Der Chemieunterricht*, 10 (3), 45-61.
- Vollmer, G. (2014). Die naturwissenschaftliche Methode – gibt es die? *Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule* 63(8), 11-17.
- Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematikdidaktik* 1, 59-95.