Anna-Katharina ROOS, Würzburg

Aspekte und Grundvorstellungen des Extrempunktbegriffs im Übergang Schule-Universität

Der Übergang von Schule zu Hochschule bringt für Lernende eine Vielzahl an Schwierigkeiten mit sich. Mehrere Studien haben diese bereits aus unterschiedlichen Perspektiven heraus untersucht (vgl. Gueudet, 2008). Der hier vorgestellte Beitrag lässt sich zu Untersuchungen, die vor allem die Wissensorganisation der Lernenden in den Blick nehmen, einordnen. Um uns dem Begriffsverständnis und damit verbundenen Schwierigkeiten in Bezug auf den Extrempunktbegriff zu nähern, nehmen wir eine normative und eine deskriptive Sichtweise ein, die mit Hilfe verschiedener theoretischer Konstrukte strukturiert werden.

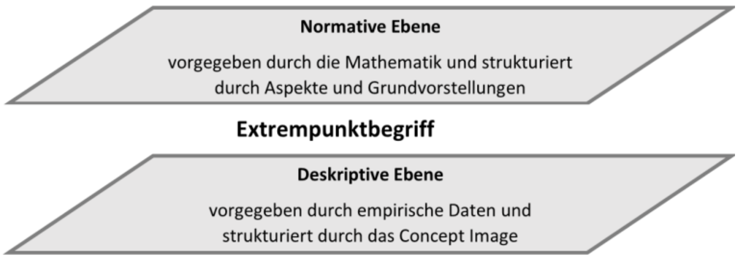

Abb. 1: Zwei Ebenen bzgl. des Verständnisses des Extrempunktbegriffs

Theoretischer Hintergrund

Die deskriptive Ebene, also die tatsächlichen Gedanken der Lernenden, werden mit dem Concept Image Konstrukt gegliedert (vgl. Tall & Vinner, 1981). Die normative Ebene wird basierend auf Aspekten und Grundvorstellungen (vgl. Greefrath et al., 2016, S. 17) aufgestellt. Da die Phase des Übergangs Schule-Universität mit mehreren Vorstellungsänderungen und kognitiven Umbrüchen verbunden ist, kann eine zusätzliche Unterscheidung der normativ betrachteten Aspekte und Grundvorstellungen hilfreich sein: Wir nennen eine Grundvorstellung eine *partielle Grundvorstellung*, wenn sie einschränkende Voraussetzungen im betrachteten Anwendungsbereich hat. Demgegenüber nennen wir eine Grundvorstellung eine *allgemeine Grundvorstellung*, wenn sie im betrachteten Anwendungsbereich ohne weitere Voraussetzungen gültig ist. Diese Unterscheidung ist hilfreich, da partielle Grundvorstellungen – obwohl nur teilweise gültig – trotzdem in einigen Situationen nützliche Sichtweisen beinhalten. Trotzdem sollten sie von allgemeinen Grundvorstellungen unterschieden werden. Analog charakterisieren wir auch *partielle* und *allgemeine Aspekte*. Diese Abgrenzung basiert auf einer Reflexion über das jeweils zugrunde gelegte Themengebiet und setzt dabei

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

wesentlich das Bewusstmachen des Gültigkeitsbereichs der betrachteten Aspekte und Grundvorstellungen voraus.

Forschungsfragen

Aufbauend auf den theoretischen Überlegungen ergeben sich damit für uns die folgenden Forschungsfragen:

FF1) Welche Aspekte und Grundvorstellungen kennzeichnen den Extrempunktbegriff im Fach Analysis I?

FF2) Welche Concept Images haben Mathematikstudierende in Analysis I in Bezug auf den Extrempunktbegriff?

FF3) Welche Ursachen haben Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Verständnis des Extrempunktbegriffs?

Methodik

Während FF1 basierend auf theoretischen Überlegungen normativ beantwortet wurde, wurde im Hinblick auf FF2 und FF3 eine empirische Studie vollzogen: Zunächst wurde mit 89 Teilnehmern der Veranstaltung Analysis I sowie mit drei Studierenden kurz vor dem ersten Staatsexamen am Ende des Wintersemesters 2016/2017 eine schriftliche Befragung durchgeführt. Diese setzte sich aus fünf Items zum Extrempunktbegriff zusammen. Ein Beispiel ist das folgende Item 1:

Wenn $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf (a, b) ist, dann nimmt f seine Extremwerte auf $[a, b]$ an.

Die Items sollten von den Studierenden als wahr oder falsch eingestuft und die getroffene Entscheidung begründet werden. Im Anschluss an die Befragung wurde mit 13 dieser Studierenden ein fokussiertes Leitfadeninterview durchgeführt, in dessen Mittelpunkt die jeweilige individuelle schriftliche Bearbeitung stand. Die Auswahl basierte einerseits auf der Bereitschaft der Studierenden an einem Interview teilzunehmen, andererseits wurde versucht eine möglichst weite Bandbreite an aufgetretenen Schwierigkeiten abzudecken. Während der Interviews wurden den Teilnehmern zusätzlich Antworten anderer Studierender vorgelegt, zu welchen sie Stellung beziehen sollten. Durch die Interviews sollten tieferliegende Gründe für die jeweiligen Schwierigkeiten mit dem Extrempunktbegriff offengelegt werden.

Ergebnisse

Die Antwort auf FF1 liefert eine Strukturierung der normativen Ebene in drei Aspekte (einen allgemeinen und zwei partielle Aspekte) sowie vier darauf aufbauende Grundvorstellungen (eine allgemeine und drei partielle Grundvorstellungen).

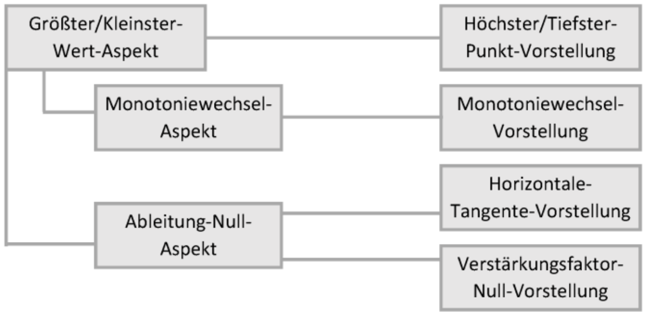

Abb. 2: Aspekte und Grundvorstellungen des Extrempunktbegriffs

Der Monotoniewechsel-Aspekt sowie der Ableitung-Null-Aspekt stellen partielle Aspekte dar, denn sie besitzen keine allgemeine Gültigkeit: Aus dem Vorhandensein eines Extrempunktes lässt sich im Allgemeinen nicht auf die Existenz eines Monotoniewechsels bzw. auf die Existenz einer Nullstelle der ersten Ableitung schließen. Der Größte/Kleinste-Wert-Aspekt hingegen stellt einen allgemeinen Aspekt dar, denn er ist für alle reellen Funktionen gültig, d.h. nimmt eine Funktion den größten/kleinsten Wert an, bringt dies immer die Existenz eines Extrempunktes mit sich (und auch umgekehrt). Darauf aufbauend ist auch nur die Höchste/Tiefste-Punkt-Vorstellung als eine allgemeine Grundvorstellung zu klassifizieren.

In Bezug auf FF2 konnten mehrere Concept Images zum Extrempunktbegriff ausfindig gemacht werden. Im Folgenden wird beispielhaft auf zwei Schwierigkeiten eingegangen und im Zuge dessen werden mögliche Ursachen für diese im Rahmen des Vergleichs mit partiellen Aspekten aufgezeigt.

Beispiel 1: Extrempunkte bei konstanten Funktionen werden nicht erkannt.

In der schriftlichen Befragung erklärt Ali zu Item 1 (siehe oben) Folgendes:

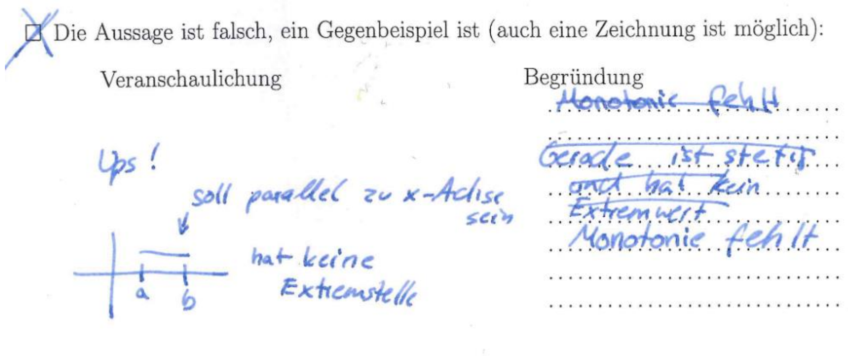

Abb. 3: Ausschnitt aus Alis schriftlicher Befragung

Ali greift zur Begründung seines Gegenbeispiels auf den Monotoniewechsel-Aspekt zurück. Allerdings beachtet er nicht, dass man zwar aus einem Monotoniewechsel auf einen Extrempunkt schließen kann, aber nicht aus einem Extrempunkt auf einen Monotoniewechsel (somit ist auch die Kontraposition – aus einem Fehlen eines Monotoniewechsels lässt sich auf das Fehlen eines Extrempunktes schließen – falsch). Der partielle Charakter dieses Aspekts wird in Alis Argumentation nicht beachtet.

Beispiel 2: Extrempunkte auf dem Rand eines Intervalls werden nicht erkannt.

Bei der Besprechung von Item 1 (siehe oben) während des Interviews bekommt Florian ein (angebliches) Gegenbeispiel vorgelegt und soll dazu Stellung beziehen. Er erklärt:

Florian: Also wenn ich jetzt ein Extremum bestimme, dann habe ich ja irgendwie $f'(x_0)$ und wenn x_0 das Extremum ist, ist/ soll null sein. […] Und daraus kann ich jetzt das Extremum bestimmen. Wenn ich jetzt eine Gerade oder eine konstante Funktion habe, dann habe ich eine Zahl [als Ableitung] und die kann ja niemals null werden, also außer das ist automatisch null. Und dadurch habe ich ja kein wirkliches Extremum. Ich wüsste sonst gerade nicht, wie ich das noch argumentieren soll.

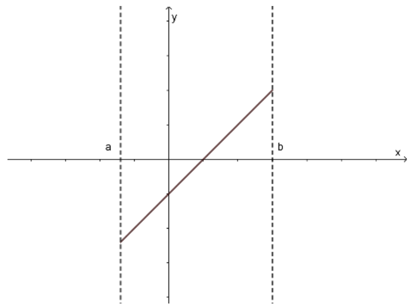

Abb. 4: Lineare Funktion als angebliches Gegenbeispiel zu Item 1

Florian greift in seiner Argumentation auf den Ableitung-Null-Aspekt zurück, beachtet allerdings nicht, dass dieser für Randpunkte nicht gültig ist.

Diskussion

Beide Beispiele zeigen, dass die Verknüpfung des passenden Gültigkeitsbereichs im Hinblick auf erlernte Aspekte und damit verbundene Grundvorstellungen wesentlich ist. Nur dadurch können passende Situationen erkannt werden, in welchen die Anwendung partieller Aspekte und Grundvorstellungen zu richtigen Interpretationen, Schlussfolgerungen und damit Ergebnissen führt. Werden sie dagegen der individuellen Argumentation in unpassenden Situationen zu Grunde gelegt, können sie sogar ursächlich für Fehler sein. Die Unterscheidung in partielle und allgemeine Grundvorstellungen kann folglich bei der Analyse von Schwierigkeiten und deren Ursachen hilfreich sein.

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016): *Didaktik der Analysis.* Heidelberg: Springer-Verlag.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational studies in mathematics,* 67(3), 237–254.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(2), 151–169.