

Hana RUCHNIEWICZ, Essen

## **Fehlertypen und mögliche Ursachen beim situativ-graphischen Darstellungswechsel von Funktionen**

Die Fähigkeit flexibel zwischen Darstellungsformen von Funktionen zu wechseln gilt als zentrale Kompetenz beim funktionalen Denken. Die Übersetzung einer situativen in eine graphische Repräsentation ist dabei besonders herausfordernd. Gegebene Informationen müssen sortiert und evaluiert werden, bevor das realweltliche in ein mathematisches Modell abstrahiert werden kann (Nitsch, 2015). Obwohl zahlreiche Studien die Fähigkeiten von Lernenden bei Übersetzungsprozessen zwischen Funktionsrepräsentationen thematisieren (u. a. Leinhardt et al., 1990), besteht für den situativ-graphischen Darstellungswechsel (sit.-graph. DW) weiterer Forschungsbedarf.

### **Theoretischer Hintergrund**

Um diesen Repräsentationswechsel zu meistern, müssen drei Grundvorstellungen (GVen) zum Funktionsbegriff aufgebaut werden: Zuordnung, Kovariation und Objekt. Thompson und Carlson (2017) beschreiben etwa, wie sich die Kovariationsvorstellung von einer separaten Betrachtung der Veränderung beider Größen hin zu einem stückweisen Verständnis von Veränderungen, bei der die gemeinsame Größenvariation stets in abgeschlossenen Intervallen betrachtet wird, entwickelt. Letztlich wird die Kovariation kontinuierlich erfasst. Können GVen situationsadäquat aktiviert werden, sind Lernende in der Lage funktionale Abhängigkeiten zu erfassen und angemessen mit dem Funktionsbegriff umzugehen. Dass dies eine Herausforderung darstellt, zeigen zahlreiche Fehlertypen, die in diesem Bereich beschrieben sind.

Prominente Phänomene sind etwa der Graph-als-Bild (G-a-B) Fehler, bei dem ein Graph als fotografisches Abbild der Situation gedeutet wird, oder die Steigungs-Höhe Verwechslung, bei der ein Variablenwert anstatt der Änderungsrate einer Größe betrachtet wird (u. a. Nitsch, 2015). Mögliche Ursachen sind z. B. die Ablenkung durch visuelle Situationseigenschaften, fehlende Identifikation physikalischer Größen im Graphen oder unzureichend ausgeprägte GVen (u. a. Clement, 1985). Inwiefern solche Fehler beim sit-graph. DW auftreten ist nicht gänzlich geklärt. Leinhardt et al. (1990, S. 16) bemerken: „Most of the studies that include translation tasks focus on the connection between graphical and algebraic representations of functions.“

### **Forschungsfragen**

Untersucht wird, welche Fehlertypen beim sit.-graph. DW bei Studierenden auftreten und welche Ursachen sich aus ihren Begründungen ableiten lassen.

## Datenerhebung

Aufgabenbasierte Interviews wurden mit der Methode des lauten Denkens durchgeführt. Lernende bearbeiteten eine offene Diagnoseaufgabe (Tab. 1), welche innerhalb einer digitalen Lernumgebung zur Selbstdiagnose präsentiert wurde. Video- und Bildschirmaufnahmen liegen von 15 (9 w, 6 m) BA-Studierenden des Faches Mathematik mit der Lehramtsoption HRSGe vor.

Zeichne einen Graphen aus dem man ablesen kann, wie sich die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit verändert.

Niklas setzt sich auf sein Fahrrad und fährt von zu Hause los. Dann fährt er mit gleichbleibender Geschwindigkeit die Straße entlang bevor es einen Hügel hinaufgeht. Oben auf dem Hügel bleibt er ein paar Minuten stehen, um die Aussicht zu genießen. Danach fährt er wieder herunter und bleibt unten am Hügel stehen.

Tab. 1: Diagnoseaufgabe zum situativ-graphischen Darstellungswechsel

## Analyse und Ergebnisse

Eine korrekte Lösung erstellten drei Studierende, wobei zwei Zeit-Geschwindigkeits- und ein Zeit-Entfernungs-Graph erstellt wurden. Daneben gab es drei richtige Antworten, bei denen einzelne *Teilsituationen nicht modelliert* wurden (z. B. Anfahren). Dies trat bei fünf weiteren Studierenden in Verbindung mit anderen Fehlertypen auf. Zwei Lernende, die einen G-a-B Fehler zeigten, betrachteten z. B. nur den Hügel. Eine Studentin zeichnete für das Stehenbleiben auf dem Hügel lediglich einen Nullpunkt anstelle eines konstanten Abschnitts. Hier wird von einer *Punkt-Intervall-Verwechslung* gesprochen. Diese kann womöglich auf einen Flüchtigkeitsfehler zurückgeführt werden, da sie die entsprechende Textstelle überspringt und kein Hinweis auf eine lokale Betrachtung der graphischen Darstellung geäußert wird.

Der *Graph-als-Bild Fehler* zeigt sich bei drei Studierenden (z. B. Abb. 1a). Bezogen auf den zweiten steigenden Abschnitt des Graphen äußerte der Student: „Das soll zeigen, dass der den Hügel jetzt hochfährt, aber das Problem ist, dass da nicht steht, ob der schnell nach oben fährt, weil das ist ja eigentlich viel Geschwindigkeit.“ Demnach kann er den Verlauf des Graphen richtig interpretieren, was er auch zeigt, indem er den Anfang korrekt modelliert, wird aber dennoch von visuellen Situationsmerkmalen (Hochfahren) abgelenkt. Zudem sei es ihm schwer gefallen die Situation zu visualisieren, während er den Graphen, also das zugehörige mathematische Modell, erstellt hat. Als weitere Ursache lässt sich eine unzureichende Kovariationsvorstellung vermuten. Eine Studentin, die eine Hügelform zeichnet, erklärt, dass sich die Geschwindigkeit zunächst ändert, weil er den Hügel rauffährt, dann würde sie sich nicht mehr ändern, da er stehenbleibt, und dann ändert sie sich wieder beim Runterfahren. Sie achtet nur darauf, ob sich die abhängige Größe mit Zunahme der Unabhängigen verändert, beachtet aber weder die Richtung

noch das Ausmaß dieser Variation. Schließlich lässt sich ein fehlendes Verständnis des Graphen als abstrakte Funktionsrepräsentation als Ursache nennen, da eine Studentin annimmt, sie müsse den Weg der Fahrt zeichnen.

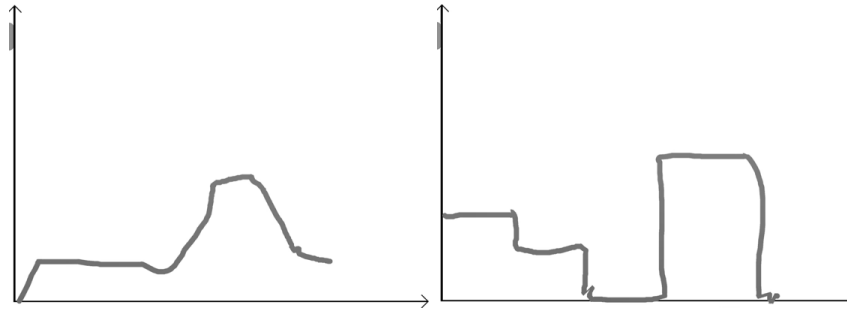


Abb. 1: Beispiele für a) Graph-als-Bild Fehler; b) Missachtung der Eindeutigkeit

Ein Fehlertyp, der ebenfalls bei drei Probanden auftritt, ist die *Missachtung der Eindeutigkeit*. Während zwei Studierende in der Sachsituation richtig beschreiben, dass es zu jedem Zeitpunkt nur eine Geschwindigkeit geben kann, erkennen sie die Verletzung dieser Eigenschaft nicht in ihren Graphen (z. B. Abb. 1b). Dies kann durch eine stückweise Kovariationsvorstellung induziert werden: „Ich bin davon ausgegangen, dass die neue Geschwindigkeit immer sofort erreicht wird. Ich bin nicht davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeit sich langsam ändert. Ich habe sofort mit einer neuen Geschwindigkeit losgelegt.“ Ein diskreter Graph wird nicht erwägt. Vermutlich ist das „ungewöhnliche“ Aussehen einer abschnittsweise definierten Funktion nicht vertraut oder wird nicht als Funktion identifiziert (Leinhardt et al., 1990). Eine Studentin, die die funktionale Abhängigkeit nicht erfasst und den Zusammenhang „Strecke-Zeit“ betrachtet, begeht diesen Fehler aufgrund ihrer *falschen Achsenbeschriftung*. Da sie der y-Achse die Zeit zuordnet, zeichnet sie das Stehenbleiben als senkrechte Gerade, weil der Radfahrer dort „Zeit ohne Weg verbraucht“. Vermutlich fehlt ihr ein Verständnis für Konventionen der graphischen Darstellungsform, da ihr nicht bewusst scheint, dass man die unabhängige Variable auf der x-Achse einträgt.

Zwei Lernende zeigen eine *umgekehrte Steigungs-Höhe Verwechslung*. Sie skizzieren den Wert der abhängigen Variablen als Steigung des Graphen. Eine konstante Geschwindigkeit wird daher als konstante Steigung und eine Fallende mit einem flacheren Abschnitt modelliert (z. B. Abb. 2a). Sie erstellen den zugehörigen Zeit-Entfernungs-Graphen, obwohl sie die Achsen zuvor mit Zeit und Geschwindigkeit beschriftet haben. Möglich ist, dass dies aus Gewohnheit geschieht, da Lernende i. d. R. mit Zeit-Weg-Diagrammen vertraut sind und zu Übergeneralisierungen tendieren (u. a. Nitsch, 2015). Zudem scheint ihnen nicht bewusst zu sein, wie die betrachteten Größen repräsentiert werden. Hierfür könnte ein unzureichendes Verständnis über die Konventionen einer graphischen Funktionsdarstellung verantwortlich sein.

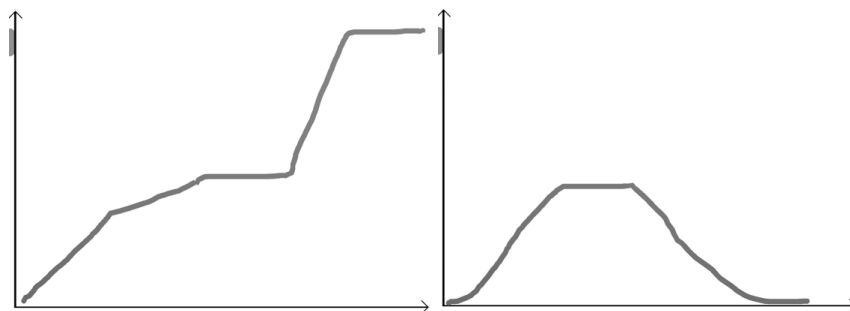


Abb. 2: Beispiele für a) umgekehrte Steigungs-Höhe Verwechslung; b) Missachtung des Variablenwerts

Einen ähnlichen Fehlertyp stellt die *Missachtung des Variablenwerts* dar, die dreimal auftritt. Dabei wird zwar die Veränderung der abhängigen Variablen, nicht aber deren Wert beachtet (z. B. Abb. 2b). Beim Stehenbleiben auf dem Hügel wird z. B. erkannt, dass die Zeit zunimmt, während die Geschwindigkeit sich nicht ändert, sodass der Graph eine konstante Gerade sein muss, aber nicht, dass der Graph den Wert null annimmt. Die Studierenden fokussieren hierbei ausschließlich die Kovariation der Größen des funktionalen Zusammenhangs, sodass als Fehlerursache eine fehlende Verknüpfung von Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung angenommen werden kann.

## Fazit

Sieben Fehlertypen wurden identifiziert, wobei bekannte Muster sowie neue Phänomene auftraten. Dies zeigt, wie schwierig der sit.-graph. DW selbst für erfahrene Lernende ist. Sie müssen ein Situationsmodell generieren, das mathematisiert und graphisch kodiert wird. Als zentrale Fehlerursachen wurden ein fehlendes Verständnis für den Graph als Repräsentation eines mathematischen Modells sowie dessen Konventionen und eine unzureichende Ausbildung oder Verknüpfung von GVen identifiziert. Trotz der geringen Stichprobe kann als Förderempfehlung (für die Schule) abgeleitet werden, dass der Umgang mit Graphen und die wechselseitige Betrachtung von Variablenwerten und -veränderungen bei Funktionen stärker zu fokussieren ist.

## Literatur

- Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the 9th PME Conference* (S. 369-375). Noordwijkerhout: PME.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge: Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Thompson, P. & Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Hrsg.), *Compendium for research in mathematics education* (S. 421-456). Reston: NCTM.