Alexander SALLE, Osnabrück, Daniel FROHN, Bielefeld &
Dennis MAY-JOHANN, Osnabrück

Sinus als Seitenverhältnis – Bearbeitungsstrategien und Vorstellungsdefizite

Für ein sinnkonstituierenden und inhaltlich tragfähigen Mathematikunterricht stellen Grundvorstellungen eine zentrale Kategorie dar. Während in vielen inhaltlichen Bereichen auch empirische Ergebnisse zu Grundvorstellungen vorliegen, ist dies für den Bereich der Trigonometrie bisher nur auf stoffdidaktisch-normativer Ebene erforscht. Der vorliegende Beitrag fokussiert auf eine erste empirische Grundlegung der *Verhältnis-Vorstellung*, eine der Grundvorstellungen von Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck.

1. Grundvorstellungen zu Sinus/Kosinus und Forschungsstand

Salle und Frohn (2017) identifizieren in einer normativen Analyse die Seitenverhältnis-Vorstellung als eine von vier Grundvorstellungen im Bereich Sinus und Kosinus, die im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II relevant sind. Diese lauten (formuliert für Sinus, analog für Kosinus):

- *Verhältnis-Vorstellung*: Sinus im rechtwinkligen Dreieck als Seitenverhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse.
- *Projektions-Vorstellung*: Sinus im rechtwinkligen Dreieck als Projektionsfaktor bei Projektion der Hypotenuse auf die Gegenkathete.
- *Einheitskreis-Vorstellung*: Sinusfunktion als Zuordnung eines Winkels im Einheitskreis zu einer Punktkoordinate bzw. Seitenlänge.
- *Oszillations-Vorstellung*: Sinusfunktion als funktionaler Zusammenhang oszillierender Vorgänge.

Die Verhältnisvorstellung kann dabei unterschiedlich ausgeprägt sein. Bezogen auf ein spezielles Dreieck bezieht sie sich auf die Verhältnisse der speziellen gegebenen Seitenlängen (*einfach*). Wird die Vorstellung auf eine Klasse von Dreiecken bezogen, bezieht sich das konstante Verhältnis auf die Seitenlängen aller Dreiecke in dieser Klasse (*erweitert*). Weiterhin kann die Vorstellung auf verschiedene Einzelfälle bezogen sein, ohne „bewegliche“ Zusammenhänge zwischen den Dreiecken in Betracht zu ziehen (*statisch*) (vgl. Roth, 2005). Werden solche Übergänge mental durchgeführt und verschiedene Dreiecke beispielsweise durch Bewegungen von Eckpunkten, Verlängerungen von Seiten, etc. ineinander überführt, liegt bereits ein mental bewegliches Modell vor, welches Kovariationen von Winkel, Seiten und/oder Seitenverhältnissen erlaubt (*dynamisch*).

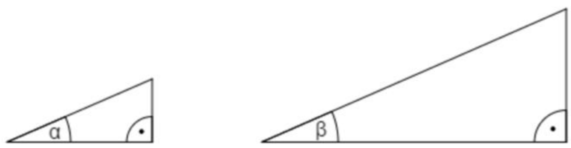
Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

2. Forschungsfragen und Anlage der Studie

Aus bisherigen Forschungsergebnissen zu Sinus und Kosinus und auf Grundlage der normativen Vorarbeiten verfolgt das Projekt GruSiKo die Fragestellung, inwieweit individuelle Vorstellungen bei Schülerinnen und Schülern vorliegen und wie sie sich zu den vorgestellten normativen Leitlinien verhalten. Weiterhin sollen Fehlstrategien und Vorstellungsdefizite im Bereich Sinus Kosinus identifiziert und mit bekannten Fehlermustern sowie Ergebnissen in Beziehung gesetzt werden (u.a. Kendal & Stacey, 1997, Weber, 2005).

Um diese Ziele auf breiter Ebene verfolgen zu können, wurde ein schriftlicher Test entwickelt, in dem Items zu verschiedenen Ausprägungen der Verhältnisvorstellung eingesetzt wurden. Der Test wurde in vier zehnten Klassen pilotiert (n = 77), die Testzeit dauerte 30 Minuten. In den Klassen wurde der Einheitskreis bereits eingeführt, jedoch noch keine systematischen Betrachtungen von trigonometrischen Funktionen.

Auf Basis der Testbearbeitungen wurde eine zweistufige Analyse der Ergebnisse durchgeführt: a) Dichotome Auswertung der Lösungshäufigkeiten, b) Klassifizierung korrekter und inkorrekter Bearbeitungen hinsichtlich ähnlicher Strategien und Fehlermuster. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Aufgabe DV (s. Abb. 1) im Hinblick auf die o.g. Forschungsfragen analysiert.



Du siehst hier zwei rechtwinklige Dreiecke. Der Winkel α ist genauso groß wie der Winkel β. In dem linken Dreieck ist sin(α) = 0,4.

Was kannst du über sin(β) in dem rechten Dreieck aussagen? Ist sin(β) größer, kleiner oder gleich sin(α)? Begründe deine Antwort.

Abb. 1: Aufgabe DV zur erweiterten Verhältnisvorstellung

3. Ergebnisse

Von den 77 Schülerinnen und Schülern lösten 71 % die Aufgabe DV korrekt. 26 % Bearbeitungen waren fehlerhaft, 3 % der Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Aufgabe gar nicht (s. Abb. 2).

Im zweiten Schritt wurden die korrekten Lösungen nach Bearbeitungsstrategien klassifiziert. Dabei konnten drei grundlegend verschiedene Arten von Begründungen bestimmt werden. Diese sind im Folgenden mit einer jeweils typischen Bearbeitung abgebildet:

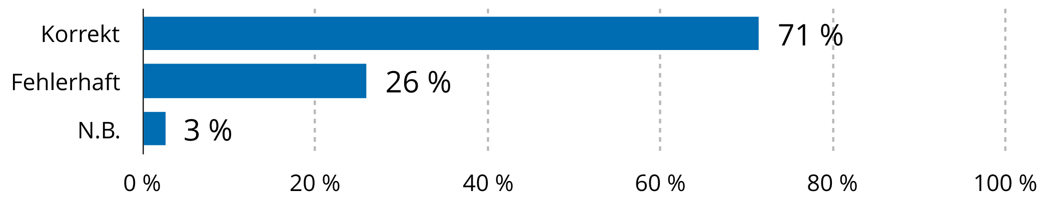


Abb. 2: Lösungshäufigkeit des Items DV

+ Begründung durch Gleichheit der Winkel (30 Lösungen): *„α und β sind gleich, darum ist auch der Sinus von beiden gleich.*“

+ Begründung durch Gleichheit der Seitenverhältnisse (9 Lösungen): „*Die Seitenverhältnisse sind in beiden Dreiecken gleich, deshalb ist auch der Sinus gleich*.“

+ Begründung durch Ähnlichkeit der Dreiecke (16 Lösungen): „*Die beiden Dreiecke sind ähnlich. Dann ist auch Sinus von den Winkeln in beiden gleich*.“

Zudem wurden die fehlerhaften Lösungen hinsichtlich ähnlicher Bearbeitungen klassifiziert. Dabei traten zwei Kategorien fehlerhafter Bearbeitungen auf. Wie oben ist jeweils eine exemplarische Lösung angegeben.

– Begründung durch Größe des Dreiecks (9 Lösungen): „*Ich denke, dass sin(β) größer ist als sin(α). Die Winkel mögen zwar gleich groß sein, aber das rechte Dreieck ist größer und somit sind die Seiten auch länger. sin(α) oder/und sin(β) beziehen sich ja nicht auf die Winkel, sondern auf die Seiten*.“

– Nicht ausreichende Begründungen (11 Lösungen): „*Sinus ist gleich weil die Dreiecke auch gleich sind nur das eine größer ist*.“

4. Diskussion und Fazit

Insgesamt wird die Aufgabe von fast drei Vierteln aller Schülerinnen und Schüler korrekt gelöst. Diese verfügen demnach über Strategien bzw. Kenntnisse, wie man Sinuswerte zweier ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke vergleicht.

Dabei wurde in 9 korrekten Bearbeitungen ein expliziter Bezug zu den Verhältnissen der entsprechenden Seiten in den Begründungen sichtbar. Hier kann davon ausgegangen werden, dass die jeweiligen Schülerinnen und Schüler über eine Vorstellung zu Sinus verfügen, die wichtige Aspekte einer der Verhältnisvorstellung beinhaltet.

30 Bearbeitungen begründen ihre Bearbeitung mit der Gleichheit der Winkel. Hier liegen Ansätze vor, die im weiteren Verlauf des Unterrichts für die

Einheitskreis-Vorstellung relevant werden, da sie als Zuordnung zwischen Winkel und Seitenlänge/Seitenverhältnis/Sinus-Wert verstanden werden können. Inwieweit hier eine Verhältnis-Vorstellung vorliegt, lässt sich auf Basis dieser Antworten jedoch nicht feststellen.

In 11 korrekten Bearbeitungen wird durch den Rückbezug zur Ähnlichkeit der beiden Dreiecke eine einwandfreie und in Fachsprache verfasste Begründung gegeben. Inwieweit die Lernenden in der Lage wären, den Begriff der Ähnlichkeit zu „entfalten“ und Folgerungen auf die Invarianz der Seitenverhältnisse ähnlicher Dreiecke ziehen könnten, kann auf Basis der schriftlichen Äußerungen nicht näher beantwortet werden.

Bei der Klassifizierung der fehlerhaften Bearbeitungen zeigt sich eine typische Fehlstrategie, die auf einer unvollständigen bzw. fehlerhaften Vorstellung beruht: Sinus wird nicht als *Verhältnis* zweier Seiten verstanden, sondern als Zahlenwert, der auf der *Länge der Seiten* beruht. Antworten von Schülerinnen und Schülern, die die Frage in dieser Art beantworteten, geben Hinweise auf eine Fehlvorstellung. In Wechselwirkung mit der Einheitskreis-Vorstellung besteht zudem die Gefahr, dass die genannte fehlerhafte Vorstellung noch gefestigt wird: Die Festlegung der Hypotenuse als 1 führt gerade zur Gleichheit von Seitenlänge der Gegenkathete und Seitenverhältnis von Gegenkathete und Hypotenuse.

5. Ausblick

Auf Basis der vorgestellten Bearbeitungen und den Ergebnissen der übrigen Aufgaben des Tests könnte eine detailliertere Untersuchung von Schülervorstellungen – beispielweise in Form von Interviews – weitere Zusammenhänge zwischen Begründungsmustern und Vorstellungen zu Seitenverhältnissen in rechtwinkligen Dreiecken offenlegen. Insbesondere im Hinblick auf einen grundvorstellungsorientierten Mathematikunterricht ist dies mehr als wünschenswert.

Literatur

Kendal, M. & Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, 34(1), 4-8.

Roth, J. (2005). *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.

Salle, A. & Frohn, D. (2017). Grundvorstellungen zu Sinus und Kosinus. *mathematik lehren*, 204, 8-12.

Weber, K. (2005). Students’ Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.