

Constanze SCHADL, München & Stefan UFER, München

Innovative Modellierungen von bivariaten Zusammenhängen im Bereich der Bruchrechnung

Dass die Bruchrechnung Lernende vor Herausforderungen stellt (Ni & Zhou, 2005) ist ebenso gut gesichert wie die Bedeutung des Bruchzahlkonzepts für den späteren Erfolg (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012). Zeitgleich baut der Erwerb des Bruchzahlkonzepts auf einer Reihe von individuellen Lernvoraussetzungen auf. In diesem Bereich wird auch das proportionale Schließen genannt (z.B. Hansen et al., 2015). Aus theoretischer Sicht werden für das proportionale Schließen insofern Zusammenhänge mit der Bruchrechnung erwartet, als dass es ebenso wie Bruchzahlen die gleichzeitige, multiplikativ integrierte Betrachtung von zwei Größen erfordert. Bisherige Forschungsergebnisse basieren mitunter auf linearen Regressionsanalysen, wobei das proportionale Schließen auch unter Kontrolle anderer Voraussetzungen für den Bruchzahlerwerb prädiktiv ist (Hansen et al., 2015). Dies bestätigen auch eigene Studien (Schadl, in Vorbereitung). Über das „mehr ist besser“ hinaus lassen lineare Regressionsanalysen jedoch kaum differenziertere Interpretationen zu. Gerade für fachdidaktische Entscheidungen wären jedoch dahingehend Informationen hilfreich, welche Anforderungen in den Vorwissensbereichen aller Voraussicht nach einen Lernzuwachs erwarten lassen. Als Teil des EWIWE-Projektes (Schadl & Ufer, 2018) wird in dem vorliegenden Beitrag am Beispiel des proportionalen Schließens die Fragestellung untersucht, inwiefern Stufenmodelle im Vergleich zu linearen Regressionsmodellen eine differenziertere Beschreibung der Zusammenhänge zwischen dem proportionalen Schließen und verschiedenen Lernergebnissen aus der Bruchrechnung erlauben. In Bezug auf die Lernergebnisse wird in dem Beitrag das Verständnis der Bruchzahlaspekte in den Fokus gerückt.

Methodik

Im Rahmen des EWIWE-Projektes wurde zu zwei Messzeitpunkten (MZP) eine Studie mit 18 Klassen der Jahrgangsstufe 6 durchgeführt, um die Prädiktivität zu untersuchen. Der erste MZP fand unmittelbar zu Beginn des Schuljahres 2018/19 noch vor der systematischen Behandlung der Bruchrechnung im Unterricht statt. Der zweite MZP erfolgte im Anschluss an die Behandlung der Bruchrechnung. Zum ersten MZP bearbeiteten Lernende die Messinstrumente zu verschiedenen Lernvoraussetzungen, zum zweiten MZP die Messinstrumente zu verschiedenen Lernergebnissen aus der Bruchrechnung. Alle Messinstrumente wurden im Paper-Pencil-Format eingesetzt. Die Stichprobe setzte sich jeweils zur Hälfte aus Lernenden der Realschule und

des Gymnasiums zusammen. Insgesamt nahmen $N = 356$ (45,5% weiblich) an beiden MZPen teil. Die Stufenmodelle wurden darüber hinaus auf einer weiteren Datengrundlage entwickelt, welche hier nicht vorgestellt wird. Das proportionale Schließen wurde mithilfe von missing value tasks in verschiedenen Kontextsituationen erfasst, wobei in Anlehnung an bisherige empirische Forschungsbefunde (z.B. Van Dooren, De Bock, Evers & Verschaffel, 2009) das Zahlenmaterial systematisch variiert wurde. Die Wissensbereiche aus der Bruchrechnung wurden an dem Modell von Behr, Lesh, Post & Silver (1983) orientiert, wobei die Bruchzahlaspekte durch Anforderungen zum Anteils-, Verhältnis-, Operator-, Quotienten- sowie Maßzahlaspekt in unterschiedlich stark vorstrukturierten Situationen operationalisiert wurden. Die Entwicklung der Stufenmodelle erfolgte mithilfe des Raschmodells (vgl. Moosbrugger, 2012), wobei die Stufen in Anlehnung an die Bookmark-Methode (Mitzel, Lewis, Patz & Green, 2001) generiert wurden. Für eine inhaltliche Beschreibung der Stufen wurden Anforderungen im Prosa-Text ausformuliert. Um Aussagen treffen zu können, welches Niveau im Lernergebnis bei einem bestimmten Niveau im Bereich des proportionalen Schließens zu erwarten ist, wurden nichtparametrische bivariate Regressionsanalysen unter Verwendung des Gauß-Kerns durchgeführt (Duller, 2018).

Ergebnisse

Es werden zunächst die Stufenmodelle zum proportionalen Schließen und den Bruchzahlaspekten vorgestellt, bevor die Ergebnisse der nichtparametrischen bivariaten Regressionsanalysen berichtet werden. Während in Bezug auf das proportionale Schließen auf der untersten Stufe proportionale Sachsituationen zum vertrauten Einkaufskontext, bei welchem mindestens ein Mengenverhältnis aus dem natürlichen Zahlbereich gewählt ist, eine typische Anforderung darstellen, werden auf der zweiten und dritten Stufe Anforderungen zu natürlichen und rationalen Mengenverhältnissen bewältigt. Dabei sind auf der zweiten Stufe proportionale Sachsituationen mit zwei natürlichen Mengenverhältnissen oder mit einem natürlichen externalen und einem rationalen internalen Mengenverhältnis eine typische Anforderung. Dagegen machen proportionale Sachsituationen mit einem rationalen externalen und einem natürlichen internalen Mengenverhältnis die dritte Stufe aus. Auf der vierten Stufe stellen proportionale Sachsituationen mit zwei rationalen Mengenverhältnissen eine typische Anforderung dar. Beim Stufenmodell zu den Bruchzahlaspekten befinden sich auf der untersten Stufe Anforderungen zum Anteilsaspekt in vorstrukturierten Situationen. Die zweite Stufe machen Anforderungen zum Anteilsaspekt in weniger stark und nicht vorstrukturierten Situationen sowie Verknüpfungen mit allen anderen Bruchzahlaspekten in vorstrukturierten Situationen aus. Auf der dritten und

vierten Stufe stellen Verknüpfungen mit anderen Bruchzahlaspekten typische Anforderungen dar, wobei die Vorstrukturierung der Situationen im Vergleich zu der Vorstrukturierung auf der zweiten Stufe stark abnimmt. In der Abb. wird zunächst erkennbar, welches Niveau im Lernergebnis aller Voraussicht nach zu erwarten ist, wenn ein bestimmtes Niveau in der Lernvoraussetzung erreicht wurde. Die Parallelen zur x-Achse bzw. y-Achse markieren jeweils die Grenzen der Stufen. Beispielsweise werden Lernende, die unmittelbar vor der systematischen Behandlung der Bruchrechnung den vertrauten Einkaufskontext sicher bearbeiten, gegen Ende der Behandlung aller Voraussicht nach die vorstrukturierten Anforderungen zum Anteilsaspekt sicher bearbeiten. Ein mehr oder weniger sicheres Verständnis des Einkaufskontextes scheint hierbei nicht von großer Bedeutung zu sein. Weiterhin wird erkennbar, dass vor allem solche Lernende zum Ende der Bruchrechnung voraussichtlich Verknüpfungen mit anderen Bruchzahlaspekten herstellen können, die zu Beginn der Bruchrechnung wenigstens proportionale Anforderungen mit einem rationalen Verhältnis lösen konnten. Der Unterschied von der zweiten zur dritten Stufe besteht darin, dass mit der dritten Stufe proportionale Situationen unabhängig davon, welches Mengenverhältnis rational ist, betrachtet werden können.

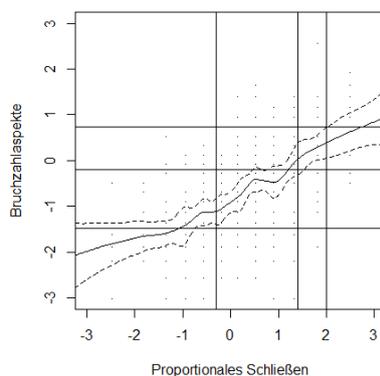


Abb.: Nichtparametrische bivariate Zusammenhänge zwischen dem proportionalen Schließen und den Bruchzahlaspekten

Diskussion

Die verwendeten Analyseverfahren ermöglichen es, Strukturen erkennbar werden zu lassen, welche über einfache lineare Zusammenhänge hinausgehen. Sie liefern dahingehend Erkenntnisse, welches Anforderungsniveau im Bereich der Lernvoraussetzungen besonders wichtig ist, um bestimmte Einsichten in Bezug auf verschiedene Lernergebnisse aus der Bruchrechnung zu erreichen. Am Beispiel des proportionalen Schließens wird sichtbar, dass insbesondere für das Bewältigen von Anforderungen mit natürlichen und rationalen Mengenverhältnissen in verschiedenen Kontextsituationen ein

Lernzuwachs zu erwarten ist. Dies zeigt sich nicht nur in Bezug auf die Bruchzahlaspekte, sondern auch für andere Lernergebnisse aus der Bruchrechnung. Einschränkend muss festgehalten werden, dass mit diesem Analyseansatz unkontrollierte bivariate Zusammenhänge betrachtet wurden. Zukünftige Forschungsbemühungen sollten insbesondere vermittelnde Prozesse fokussieren, um die Bedeutung der besonders relevanten Voraussetzungs-niveaus zu untermauern. In diesem Zusammenhang wären lokal situierte Studien zur Wissensnutzung in Lernprozessen angezeigt, um die Rolle des Wissens in Lernprozessen besser zu verstehen.

Hinweis: Dies ist ein Forschungsprojekt an der LMU München.

Literatur

- Bailey, D., Hoard, M., Nugent, L. & Geary, D. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113, 447–455.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Hrsg.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (S. 91–125). New York: Academic Press.
- Duller, C. (2018). *Einführung in die nichtparametrische Statistik mit SAS, R und SPSS. Ein anwendungsorientiertes Lehr- und Arbeitsbuch*. Berlin: Springer.
- Hansen, N., Jordan, N., Fernandez, E., Siegler, R., Fuchs, L., Gersten, R. & Micklos, D. (2015). General and math-specific predictors of six-graders' knowledge of fractions. *Cognitive Development*, 35, 34–49.
- Mitzel, H. C., Lewis, D. M., Patz, R. J. & Green, D. R. (2001). The bookmark procedure: Psychological perspectives. In G. J. Cizek (Hrsg.), *Setting performance standards: Concepts, methods and perspectives* (S. 249–281). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Moosbrugger, H. (2012). Item-Response-Theorie (IRT). In H. Moosbrugger & A. Kelava (Hrsg.), *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (S. 227–274). Berlin: Springer.
- Ni, Y. & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52.
- Schadl, C. (in Vorbereitung). Individuelle Lernvoraussetzungen für den Erwerb des Bruchzahlkonzepts. Untersuchung der Prädiktivität und Strukturanalysen. Wird erscheinen in GDM-Mitteilungen.
- Schadl, C. & Ufer, S. (2018). Vorwissen für den Erwerb des Bruchkonzepts – Erhebungsinstrumente aus dem Projekt EWIWE. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1551–1554). Münster: WTM.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 187–211.