Alexander SCHÜLER-MEYER, Eindhoven (NL)

Wie verstehen Lernende im Übergang zur Hochschule logische Beziehungen?

Die Definition von Folgenkonvergenz „(a_n) *konvergiert gegen a genau dann, wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert so dass* $|a_n - a| < \varepsilon$ *für alle* $n > N$“ drückt logische Beziehungen aus. Beispielsweise beschreibt „für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert“ eine logische Beziehung, die Lernende propädeutisch zunächst im Sinne einer funktionalen Relation verstehen könnten. Um die logischen Beziehungen der Definition erfassen zu können, müssen Lernende in der Hochschule zunächst ihre einzelnen Bestandteile verstehen (Oehrtmann, Swinyard & Martin, 2014). Ein solches Verständnis der Bestandteile der Definition kann erreicht werden, indem Lernende in reichhaltigen Lerngelegenheiten zunächst ein informelles und intuitives Verständnis dieser einzelnen Bestandteile aufbauen. Es wurde aber bisher kaum untersucht, wie Lernende ihr Verständnis der logischen Beziehungen entwickeln. Diese Frage ist aber hoch relevant, da logische Beziehungen in der Hochschulmathematik auf abstrakte und formale Weise realisiert werden, was selten in der Schulmathematik unterrichtet wird (Hoyles & Küchemann, 2002). Im Kontext eines Kurses, der Lernende in der schulischen Oberstufe auf Hochschulmathematik vorbereitet, wird hier die Frage untersucht, wie Lernende die logischen Beziehungen der Definition von Folgenkonvergenz lernen und verstehen (Schüler-Meyer, in press).

1 Logische Beziehungen und Hierarchien im Übergang zur Hochschule

Um die logischen Beziehungen der Definition von Folgenkonvergenz zu verstehen, müssen Lernende die Prozesse, die hinter den Quantoren stehen, als Objekt verstehen. Wenn ein solches Verständnis nicht aufgebaut ist, müssen sich Lernende etwa ‚für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$‘ als einen Prozess des ‚Wählens und Findens‘ vorstellen, was die logischen Beziehungen der Definition schwerer zugänglich macht (Dubinsky, Elterman & Gong, 1988).

Ein Teil der Schwierigkeiten der Lernenden mit der Definition von Konvergenz lässt sich auf die formale Sprache der Mathematik zurückführen. Die logischen Beziehungen der obigen Definition werden sowohl in Textbüchern als auch in der Interaktion zwischen Lehrenden und Lernenden oft sprachlich ausgedrückt, d.h. als „für jedes“, „existiert ein“, „für alle“ (vgl. oben). Diese Formulierungen sind bereits alltagssprachlich belegt, so dass Lernende oft mit diesem alltagssprachlichen Verständnis über die dahinter liegenden Quantoren nachdenken (Cornu, 1991), was ein formal-logisches Verständnis

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

erschwert (Epp, 2003). Da Sprache zudem zentral für die Konzeptentwicklung ist, kann vermutet werden, dass sprachliche Schwierigkeiten den Aufbau eines tragfähigen formal-logischen Konvergenzbegriffs behindern.

2 Nacherfindung von Konvergenz und Stetigkeit

Die vorliegende Fallstudie ist in einem Übergangskurses verortet, der das Ziel hatte, Lernende in der Oberstufe auf den Übergang zur Hochschulmathematik vorzubereiten. Dieser Übergangskurs fand im Schuljahr 2016/17 an einem Dortmunder Gymnasium statt. In diesem Übergangskurs wurde eine fünfwöchige Einheit entwickelt und durchgeführt, in der elf Lernende Folgenkonvergenz und Stetigkeit nacherfunden haben. Die Nacherfindung von hochschulmathematischen Konzepten ist ein etablierter Ansatz, um Lernende auf Hochschulmathematik vorzubereiten. Solche Ansätze fußen in Prinzipien der Realistic Mathematics Education, insbesondere dem Prinzip, dass Konzepte in informellen Erfahrungen in reichhaltigen Kontexten angebahnt und von diesen informellen Erfahrungen ausgehend formalisiert werden (van den Heuvel-Panhuizen & Drivers, 2014). Als reichhaltiger Kontext zur Nacherfindung von Konvergenz diente die Erkundung von unendlichen Folgen mithilfe von Epsilonstreifen (Ostsieker, 2019). Dazu wurden den Lernenden Folgen gegeben, die sie mit Epsilonstreifen klassifizieren sollten. Die gegebenen Epsilonstreifen sollten so viele Folgenglieder wie möglich überdecken. Je nach gewählter Höhe eines Streifens (das ε) variiert der Punkt, ab dem alle weiteren Folgeglieder vom Streifen überdeckt werden (das N). Bei divergenten Folgen kann solch ein Punkt nicht für alle Streifenhöhen gefunden werden. Durch eine Klassifizierung von Folgen mithilfe von Epsilonstreifen entwickeln Lernende eine erste informelle Vorstellung der obigen Definition (vgl. Schüler-Meyer, 2019).

3 Methodologie

In der hier dargestellten qualitativen Studie, die in der Forschungsmethodologie von Design-research angelegt ist, werden Lernprozesse untersucht, in denen Lernende ihr Verständnis der logischen Beziehungen und Hierarchien der Definition von Folgenkonvergenz entwickeln. Die Lernprozesse in der Einheit zur Folgenkonvergenz und Stetigkeit wurden videografiert und transkribiert. Für die Einheit wurde die Lerngruppe in zwei Gruppen geteilt: Die zweite Iteration der Einheit wurde in der einen Gruppe durchgeführt, während die anhand der Auswertung der zweiten Iteration verbesserte dritte Iteration in der anderen Gruppe mit einer Woche Verzögerung durchgeführt wurde. Beide Iterationen wurden von zwei Masterstudenten implementiert.

Die qualitative Analyse der Lernprozesse fokussiert darauf, wie Lernende logische Relationen realisieren (im Hinblick auf mathematische Darstellung und auf zugrunde liegende mathematische Vorstellungen) und wie Lernende Quantoren sprachlich-diskursiv in der Interaktion realisieren.

4 Ergebnis: Sprachliche Realisierung von Hierarchien

Vor der folgenden Episode haben die Lernenden die Idee entwickelt, dass es bei konvergenten Folgen einen Punkt A (das N in der obigen Definition) geben muss, der von m (der Höhe des Epsilonstreifens) funktional abhängig ist. Entsprechend markiert der Punkt A(m) den Startpunkt, an dem man einen Epsilonstreifen mit Höhe m an einer gegebenen Folge anlegen muss.

Leh: Okay, das heißt bei [konvergenten Folgen] ist es so, dass für dieses m eins existiert und eine Abhängigkeit davon entsteht. Und zwar nicht für irgendein m, sondern wie du schon gesagt hast, für jedes m. […]

Leh: Wir haben jetzt schon wirklich einen großen Teil. Das m das größer 0 ist. Und wir haben das A, das nur dann existiert, wenn wir überhaupt eine Pendelfolge haben für jedes m. das könnt ihr ja schon einmal so in einem Halbsatz formulieren. […]

Lorenz: Ja ich weiß immer noch nicht, wie wir es aufschreiben sollen.

Leh: Also du hast angefangen mit, das war ein guter Start, für jedes m größer 0. Und jetzt haben wir gerade festgestellt, bei Pendelfolgen ist es so, dass für jedes m größer 0 eben ein A von m existiert.

Leif: Für jedes m größer 0 existiert ein A von m.

Leh: Zum Beispiel. Das wäre ein guter Beginn, das könnt ihr ja schon einmal aufschreiben.

Diese Episode setzt ein, nachdem die Lernenden zwei Bestandteile der Definition jeweils separat voneinander verstanden haben, nämlich dass man bei konvergenten Folgen jede Höhe m wählen kann, sowie dass es einen Anlegepunkt A(m) für Epsilonstreifen gibt, der funktional von m abhängt. Wie die Äußerung von Lorenz zeigt, sehen die Lernenden den Bedarf, beide Bestandteile zu verbinden. Sie haben jedoch Schwierigkeiten, diese beiden Bestandteile der Definition explizit aneinander anzubinden. Der letzte Teil der obigen Definition wird in dieser Episode implizit mitgedacht, ist aber auch noch nicht explizit an die anderen Bestandteile der Definition angebunden. Der Lehrende gibt nun ein Formulierungsbeispiel, das von Leif sofort in fast identischem Wortlaut übernommen wird. In Leifs Äußerung und in der folgenden Konversation (nicht abgebildet) wird das Wort „existiert" übernommen, möglicherweise aufgrund der mehrfachen Nutzung des Worts durch den Lehrenden in dieser Episode. Vermutlich ist den Lernenden das Wort „existiert" aus der akademischen Schulsprache bekannt, aber dessen Benutzung in der Mathematik ist für sie neuartig, so dass eine solche imitierende

Nutzung des Wortes nicht überrascht. Wahrscheinlich trägt das Wort „existiert“ hier also noch keine logisch-formale Bedeutung, so dass auch die beiden Bestandteile der Definition zunächst noch nicht logisch miteinander verbunden gedacht werden, sondern im Sinne einer sprachlichen Verbindung.

5 Diskussion

Diese kurze Episode zeigt, dass das Lernen von logischen Beziehungen verbunden ist mit dem Lernen von mathematischer Sprache: Das Verständnis der logischen Beziehung der Bestandteile der Definition von Folgenkonvergenz entwickelt sich aus der Nacherzählung der Epsilonstreifen-Aktivität und aufbauend auf der Imitation des Wortgebrauchs des Lehrenden. Somit ist ein propädeutisches Verständnis logischer Beziehungen eng daran geknüpft, eine passende Sprache im Diskurs zu etablieren: 1. Neu etablierte Sprache gibt Lernenden die Möglichkeit, bereits erkannte logische Beziehungen formaler auszudrücken, 2. Neu etablierte Sprache ermöglicht es Lernenden, Bestandteile der Definition zunächst ohne spezifische Bedeutung aufeinander zu beziehen (als Imitation), um dann später im Verlauf des Lernprozesses diese Beziehung nochmals logisch durchzuarbeiten.

Literatur

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced mathematical thinking* (S. 153–167). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Dubinsky, E., Elterman, F. & Gong, C. (1988). The student’s construction of quantification. *Journal for Research in Mathematics Education,* 8(2), 44–51.

Epp, S. S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. *The American Mathematical Monthly,* 110(10), 886–899.

Hoyles, C. & Küchemann, D. (2002). Students’ understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics,* 51(3), 193–223.

Oehrtmann, M., Swinyard, C. & Martin, J. (2014). Problems and Solutions in students’ reinvention of a definition for sequence convergence. *The Journal of Mathematical Behavior*, 33, 131–148.

Ostsieker, L. (2019*). Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs: Gestaltung und empirische Untersuchung*. Wiesbaden: Springer-Verlag.

Schüler-Meyer, A. (2019). Hochschulmathematische Praktiken an schulnahen Inhalten – Ein tragfähiges Gestaltungsprinzip für Brückenkurse in der schulischen Oberstufe. *Der Mathematikunterricht* 2(65), 47–55.

Schüler-Meyer, A. (in press). Mathematical Routines in Transition: Facilitating Students’ Defining and Proving of Sequence Convergence. *Teaching Mathematics and its Applications.*

van den Heuvel-Panhuizen, M. & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (S. 521–525). Dordrecht, The Netherlands: Springer Netherlands.