

Uwe SCHÜRMAN, Soest

## Mathematik und Realität – Was wir von der Philosophie über Modelle lernen können

### Einleitung

Die analytische Trennung zwischen Mathematik und Realität, bzw. dem „Rest der Welt“ findet sich in zahlreichen Publikationen zu mathematischen Modellierungen wieder (vgl. Schürmann, 2018). Demgegenüber steht eine kleine Anzahl mathematikdidaktischer Veröffentlichungen, die diese Trennung infrage stellen (vgl. Biehler, Kortemeyer & Schaper, 2015; Meyer & Voigt, 2010; Voigt, 2011). Es wird erläutert, welchen Beitrag die beiden Sichtweisen innerhalb der analytischen Philosophie, die syntaktische und die semantische Sicht auf wissenschaftliche Theorien und Modelle, leisten können, wenn es um die Erfassung von Modellierungsprozessen im Mathematikunterricht geht. Dabei wird vor allem die analytische Trennung zwischen Mathematik und Realität bzw. dem „Rest der Welt“ in den Blick genommen.

### Modelle und Theorien in der analytischen Philosophie

Die Syntax einer Sprache  $S$  besteht aus deren Vokabular  $V$  und den Regeln zum Bilden wohldefinierter Ausdrücke in  $S$ . Die Semantik von  $S$  erlaubt die Interpretation von wohldefinierten Ausdrücken, indem diese auf eine andere relationale Struktur  $R$  abgebildet werden. Damit werden zum einen wohldefinierte Ausdrücke aus  $S$  verständlich gemacht und zum anderen können diese Ausdrücke innerhalb von  $R$  auf ihren Wahrheitsgehalt hin untersucht werden. Aus der Unterscheidung in Syntax und Semantik ergeben sich nun zwei konträre (jedoch inhaltlich zusammenhängende) Sichtweisen auf Modelle und Theorien: die syntaktische und die semantische Sicht.

Eine Theorie  $T$  kann *syntaktisch* definiert werden als eine nicht-leere Menge von Sätzen  $s$ , die sich aus einer Menge von Axiomen  $A$  nur durch die Verwendung syntaktischer Regeln herleiten lassen. Damit ist  $T = \{s \in S \mid A \vdash s\}$  mit  $A \subset S$ . Dem gegenüber kann eine Theorie *semantisch* definiert werden als eine Menge von Sätzen  $s$  (erster Ordnung), die innerhalb eines Modells  $M$  als wahr gelten, d. h.  $T = \{s \in S \mid M \models s\}$  mit  $M \subset R$ .

In der syntaktischen Sicht versteht man unter einer Theorie  $T$  (dem Ideal nach) eine formale Sprache  $S$ , die aus zwei disjunkten Mengen von Begriffen gebildet wird: dem theoretischen Vokabular  $V_t$  und dem Beobachtungsvokabular  $V_b$ . Damit besteht  $T$  aus der Systemsprache  $S_t$ , in der ausschließlich Begriffe aus  $V_t$  verwendet werden, und der Beobachtungssprache  $S_b$ , die ausschließlich aus Begriffen aus  $V_b$  besteht. Ausgehend davon werden Sätze

aus *St* analytische Sätze genannt; Sätze, die (auch) Begriffe aus *Vb* enthalten, werden synthetische Sätze genannt. Es wird davon ausgegangen, dass Begriffe aus *Vb* auf direkt beobachtbare physische Objekte, deren Eigenschaften oder auf die Relationen zwischen physischen Objekten verweisen. Damit, so wird angenommen, ist die Semantik solcher Begriffe direkt gegeben. Die Semantik von *St* ergibt sich indirekt, indem *St* mit *Sb* über sogenannte Korrespondenzregeln in Verbindung gebracht wird. Eine Korrespondenzregel ist ein Satz, durch den Begriffe aus *Vt* auf Begriffe aus *Vb* reduziert werden, bzw. durch diese definiert werden (Liu, 1997).

### **Kritik der syntaktischen Sicht**

Die dichotome Trennung zwischen *Vb* und *Vt* wurde durch Putnam (1962) und Achinstein (1965) infrage gestellt. Jeder Begriff aus *Vb* könne auch in einem theoretischen Sinne gebraucht werden und es müssten die Bedingungen expliziert werden, unter denen ein Begriff als das eine oder das andere gilt. Aus syntaktischer Sicht müssen *Vb*-Begriffe durch direkte Beobachtung realer Phänomene interpretiert werden können (vgl. Carnap, 1966; Hempel, 1958), da indirekte Beobachtungen, z. B. durch Instrumente, bereits eine theoretische Deutung beinhalten. Dem wird entgegnet, dass es so etwas wie bloße Beobachtungen nicht geben könne und Beobachtungen immer schon eine Art von Interpretation der Sinneseindrücke enthalten (vgl. Suppe, 1972; Quine, 1980).

Auch die Möglichkeit partieller Interpretation, d. h. der Ansatz, zwischen *Vt* und *Vb* mittels allgemeingültigen Korrespondenzregeln eine Verbindung herzustellen, wurde einer fundamentalen Kritik unterzogen. Achinstein (1965) kritisiert, dass auf unterschiedliche Begriffe nicht ein einheitliches Set von Korrespondenzregeln angewendet werden kann. Partielle Interpretation könne laut Putnam (1962) so verstanden werden, dass eine formale Sprache in Teilen in Alltagssprache übersetzt wird, eine Klasse intendierter Modelle gebildet wird oder zu einzelnen *Vt*-Begriffen Regeln zur Verifikation bzw. Falsifikation angegeben werden. Gegen alle drei Varianten wendet Putnam Bedenken ein. So bedürfe es beispielsweise bei der Modellmengenbildung wieder theoretischer Begriffe, wodurch die Argumentation zirkulär werde.

### **Kritik der semantischen Sicht**

Aus semantischer Sicht bestehen Modelle logisch wie zeitlich vor den Theorien. Sie leisten zunächst die Arbeit „vor Ort“, indem sie Phänomene der Wirklichkeit erfassen. Erst dann werden verschiedene Modelle zu übergeordneten Modellen bis hin zu ganzen Theorien zusammengefasst. Van Fraassen (1983, S. 64) schreibt hierzu: „*To present a theory is to specify a family*

*of structures, its models; and secondly, to specify certain parts of those models (the empirical substructures) as candidates for the direct representation of observable phenomena. “*

Der semantischen Sicht gelingt es durch die Verschiebung hin zu nicht-linguistischen Strukturen wie Analogien, Ähnlichkeiten und Isomorphismen individuellen Modellbildungsprozessen Rechnung zu tragen (vgl. Burscheid & Struve, 2018) und auch gegenständliche Modelle in die Theoriebildung zu integrieren. Auf der anderen Seite werden auch gegenüber diesem Ansatz gewichtige Einwände formuliert. So sei es nicht möglich, allgemeingültige Regeln dafür aufzustellen, ab wann zwei Modelle als genügend ähnlich angesehen werden können, um sie im Sinne der Theoriebildung zusammenzufassen. Insbesondere der Begriff des Isomorphismus lässt sich in vielen Fällen kaum aufrechterhalten, d. h. Modelle, die auf den ersten Blick ähnliche Strukturen aufweisen, erfüllen oft nicht die strengen Kriterien eines mathematischen Isomorphismus (Suarez, 2003). Daher setzen einige Autoren lediglich einen partiellen Isomorphismus zwischen Modell und Phänomen, bzw. verschiedenen Modellen voraus, um sie in eine Theorie zusammenfassen zu können (da Costa & French, 2003).

### **Schlussfolgerungen**

Aus den hier gemachten Ausführungen folgt, dass das Verhältnis zwischen Mathematik und Realität nicht als ein bloßer Gegensatz gedacht werden kann. Vielmehr muss ein gradueller Unterschied angenommen werden. In der Analyse von Modellierungsprozessen könnte sich der Hinweis, in welcher Hinsicht ein Begriff gebraucht wird, theoretisch oder beobachtbar, dennoch als produktiv erweisen. Eine solche Kennzeichnung ermöglicht es, einen Modellierungsprozess nicht bloß entlang von Phasen zu analysieren, sondern auch singuläre Äußerungen genauer zu deuten.

Darüber hinaus erlaubt es die Stufung zwischen den Phänomenen, *Sb* und *St* den „Bereich zwischen dem ‚Rest der Welt‘ und der ‚Mathematik‘ in den Blick zu nehmen“ (Voigt, 2011). Grundvorstellungen als „Übersetzungsscharniere“ beim Mathematisieren und Interpretieren (Prediger, 2009) können in *Sb* als partielle Interpretation von Begriffen aus *St* gedeutet werden. Grundvorstellungen aus semantischer Sicht als partiell isomorphe Strukturen zu deuten, ermöglicht es auf der einen Seite, ihren Anwendungsbereich zu umreißen, und zum anderen, die durch sie intendierten individuellen Begriffsbildungsprozesse zu antizipieren.

Der Fokus auf nicht-linguistische Strukturen in der semantischen Sicht ermöglicht einen umfassenderen Begriff von mathematischer Modellbildung,

bei dem auch Gegenstände und Handlungen als mathematische Modelle gedeutet werden können. Ein Modell spielt demnach nicht bloß die epistemische Rolle des Mittlers zwischen Mathematik und Realität, sondern ist auch ontologisch als Teil von Realität zu deuten.

## Literatur

- Achinstein, P. (1965). The problem of theoretical terms. *Am. Philos. Q.*, 2(3), 193-203.
- Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory engineering courses requiring mathematical competences. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *CERME9 - Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2060-2066). Prague: Charles University, Faculty of Education.
- Burscheid, H, J. & Struve, H. (2018). *Empirische Theorien im Kontext der Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer.
- Carnap, R. (1966). *Philosophical Foundations of Physics*. New York: Basic Books.
- da Costa, N. & French, S. (2003). *Science and Partial Truth: A Unitary Approach to Models and Scientific Reasoning*. New York: Oxford Univ. Press.
- Hempel, C. (1958). Theoretician's dilemma: A study in the logic of theory construction. In C. Hempel (Hrsg.), *Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science* (S. 173-226). New York: Free Press.
- Liu, C. (1997). Models and theories I: The semantic view revisited. *Int. Stud. Philos. Sci.*, 11(2), 147-164.
- Meyer, M. & Voigt, J. (2010). Rationale Modellierungsprozesse. In B. Brandt, M. Fetzer & M. Schütte (Hrsg.), *Auf den Spuren interpretativer Unterrichtsforschung in der Mathematikdidaktik* (117-148). Münster: Waxmann.
- Prediger, S. (2009). „Aber wie sage ich es mathematisch?“ – Empirische Befunde und Konsequenzen zum Lernen von Mathematik als Mittel zur Beschreibung von Welt. In D. Höttecke (Hrsg.), *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik* (S. 6-20). Berlin: LIT-Verlag.
- Putnam, H. (1962). What theories are not. In E. Nagel, P. Suppes & A. Tarski (Hrsg.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science* (S. 240-251). Stanford: Stanford Univ. Press.
- Quine, W.V. (1980). Two dogmas of empiricism. In W. V. Quine, *From a Logical Point of View* (S. 20-46). Massachusetts: Harvard Univ. Press.
- Schürmann, U. (2018). Towards an alternative approach to modelling in school mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, 15 (1), S. 228-250.
- Suarez, M. (2003). Scientific representation: Against similarity and isomorphism. *Int. Stud. Philos. Sci.*, 17(3), 225-244.
- Suppe, F. (1972). What's wrong with the received view on the structure of scientific theories? *Philos. Sci.*, 39, 1-19.
- van Fraassen, B. (1983). *The Scientific Image*. Oxford: Clarendon Press.
- Voigt (2011). Rationale Modellierungsprozesse. In GDM (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 867-870). Münster: WTM.