Jan SCHUMACHER, Paderborn

Deduktion und Abduktion beim diagrammatischen Schließen – das didaktische Potential der Peirceschen Semiotik

Diagrammatisches Schließen bietet eine Möglichkeit, mathematisches Arbeiten aus semiotischer Perspektive zu erklären. Dabei liegen besonders die typischen Tätigkeiten diagrammatischen Schließens, wie z.B. die Konstruktion und Manipulation von Diagrammen, im Fokus der Forschung. Darüber hinaus bietet diagrammatisches Schließen Potential, neue mathematische Beziehungen in konstruierten Diagrammen zu entdecken und aus diesen Beziehungen abduktiv auf neue Regeln zu schließen. In diesem Beitrag wird am Beispiel von Rechentafeln zur Einführung der Subtraktion negativer Zahlen dieses didaktische Potential diagrammatischen Schließens beleuchtet. Darüber hinaus wird an einer Schülerbearbeitung aufgezeigt, wie Lernende dieses Potential zur Generierung der Regel für die Subtraktion negativer Zahlen nutzen.

Diagramme und diagrammatisches Schließen

Diagramme sind nach Peirce ikonische Zeichen, die sich von anderen ikonischen Zeichen durch die Einbettung in ein vollständig konsistentes Darstellungssystem unterscheiden. Das Darstellungssystem baut auf einer einfachen sowie leicht verständlichen Grundidee auf (Peirce, 1990, S. 98) und besitzt einen „widerspruchsfreien Zusammenhang von Darstellungsmitteln, die bei einer konkreten Diagrammatisierung zum Einsatz kommen, sowie durch einen Satz von Regeln, der die zulässigen Transformationen solcher Darstellungsmittel festlegt“ (Hoffmann, 2005, S. 221). Diagrammatisches Schließen umfasst die folgenden Handlungen: die Konstruktion und die Manipulation von Diagrammen nach den Regeln des Darstellungssystems sowie das Experimentieren mit den Diagrammen (Peirce, 1976a, S. 47 f.). Für diesen Beitrag ist das Konstruieren von Diagrammen von besonderer Bedeutung. Nach Reichertz (2013, S. 26 f.) ermöglicht die Konstruktion von Diagrammen, neue Relationen, die zuvor nicht zwingend erschienen, zu entdecken. Unter dem Aspekt der Formulierung von allgemeinen Regeln, ist dies für Peirce eine entscheidende Tätigkeit: „[H]e [der Mathematiker; JS] detects relations between the parts of the diagram other than those which were used in its construction“ (Peirce, 1976, S. 749). Während die Konstruktion von Diagrammen ein deduktiver Prozess ist, der die Bekanntheit der Regeln des Darstellungssystems voraussetzt, ermöglicht das Entdecken von Beziehungen, abduktiv auf andere Regeln des Darstellungssystems zu schließen.

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

5 – (-5) = 10	5 – (-4) = 9	5 – (-3) = 8
4 – (-5) = 9	4 – (-4) = 8	4 – (-3) = 7
3 – (-5) = 8	3 – (-4) = 7	3 – (-3) = 6
2 – (-5)	2 – (-4)	2 – (-3)

5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10
4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9
3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8
2 + 3	2 + 4	2 + 5

Abb. 1: Ausschnitte zweier Rechentafeln zur Einführung der Subtraktion neg. Zahlen

Die drei Schlussformen Deduktion, Abduktion und Induktion unterscheiden sich hinsichtlich der Schlussrichtung. An den abgebildeten Ausschnitten zweier Rechentafeln, die einer Lernumgebung zur Einführung der Subtraktion negativer Zahlen entstammen, werden im Folgenden die Schlussformen Deduktion und Abduktion – auf die Induktion wird mangels Relevanz für diesen Beitrag verzichtet – erläutert und das didaktische Potential diagrammatischen Schließens im Kontext dieser Schlussformen dargestellt.

Bei der *Deduktion* wird ausgehend von einem Fall und einem Gesetz auf ein Resultat geschlossen (Meyer, 2010, S. 38). Deduktive Schlüsse nutzen Lernenden u. a. beim Vervollständigen von Rechentafeln. Ausgehend von einer Zelle ($5 - (\text{-}3)$) kann aufgrund der Konstruktionsregeln einer Rechentafel („In einer Zeile/Spalte steht immer derselbe Minuend/Subtrahend“ und „Die Minuenden/Subtrahenden werden von unten/links nach oben/rechts immer größer“) auf den Inhalt der darunter stehenden Zelle ($4 - (\text{-}3)$) geschlossen werden. Rechentafeln sind Diagramme im Sinne von Peirce, da sie nach den Regeln eines konsistenten Darstellungssystems konstruiert werden. Die Vervollständigung der Rechentafel durch die Lernenden ist eine Tätigkeit diagrammatischen Schließens, da das Diagramm durch Anwendung von Regeln des Darstellungssystems manipuliert wird.

Nachdem die Rechentafel vervollständigt wurde, können die Lernenden die Regel zur Subtraktion negativer Zahlen entdecken. Dies geschieht durch einen abduktiven Schluss. Die *Abduktion*, als eine hypothetische Schlussform, hat zu Beginn die Beobachtung eines überraschenden Phänomens respektive Resultats zu stehen, von dem aus gleichzeitig auf einen für das Phänomen ursächlichen Fall und das Gesetz, das Fall und Phänomen verbindet, geschlossen wird (Meyer, 2010, S. 41 f.). „Sobald das Gesetz bewusst ist, erscheint das Phänomen als eine konkrete Folgerung dieses Gesetzes und erhält somit seinen ‚logischen Status‘ als Resultat“ (Meyer, 2010, S. 47).

Eines der von den Lernenden in der Rechentafel zu entdeckenden Phänomene ist die Erkenntnis, dass die Subtraktion $5 - (\text{-}3)$ als Ergebnis Acht ergibt. Für die Abduktion bedarf es nun eines „Geistesblitzes“ (Meyer, 2010, S. 47) seitens der Lernenden, damit sie den Fall ($5 + 3 = 8$) und das Gesetz

(„Man subtrahiert eine negative Zahl, indem man die Gegenzahl addiert“) erkennen. Der Vergleich der einzelnen Zellen beider Rechentafeln in Abb. 1 dient als Anregung, den Lernenden diesen Geistesblitz zu ermöglichen.

An dieser Stelle zeigt sich das didaktische Potential diagrammatischen Schließens. Mithilfe der Regeln eines bekannten Darstellungssystems (Rechentafeln) lässt sich durch deduktive Schlüsse ein Diagramm manipulieren, bei dem die Regeln eines anderen Darstellungssystems (ganzzahlige Arithmetik) entdeckt werden können. Um aus den innerhalb des konstruierten Diagramms zu entdeckenden Beziehungen auf die Regeln des neuen Darstellungssystems zu schließen, bedarf es eines abduktiven Schlusses.

Das folgende Beispiel zeigt, wie der Prozess zum Entdecken der Regeln exemplarisch aussehen kann.

Beschreibung von Mias und Marlens abduktivem Prozess

Die beiden Sechstklässlerinnen eines Gymnasiums, Mia und Marlen, sind in ihrem Bearbeitungsprozess an dem beschriebenen Vergleich der beiden Rechentafeln angekommen und es ergibt sich folgende Szene:

1 **Mia**: Also, ähm, wenn du jetzt hier, zum Beispiel dieses fünf minus minus drei gleich acht anguckst ...

2 **Marlen**: ... mhm (zustimmend) ...

3 **Mia**: ... und dann halt nach unten guckst und da ist gen... ist fünf plus drei, halt ohne ...

4 **Marlen**: ...ja ...

5 **Mia**: ... nicht minus drei, sondern nur drei und das ist genau das gleiche Ergebnis

6 **Marlen**: Mhm (zustimmend). Nur, dass da (zeigt auf die untere Tabelle) dann addiert wird, da (zeigt auf die obere Tabelle) wird subtrahiert und da ist der Subtrahend dann keine negative Zahl mehr ...

7 **Mia**: Da sind die Gegenzahlen. Da sind die Gegenzahlen.

8 **Marlen**: Von der zweiten Zahl.

9 **Mia**: Ja.

10 **Marlen**: Die erste Zahl ist die gleiche. Und es wird addiert.

Abb. 2: Transkript von Mias und Marleens abduktivem Schluss

In diesem Ausschnitt ist auf Grundlage einer explikativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) zu erkennen, dass als Ausgangspunkt der folgenden Interaktion ein Phänomen („fünf minus minus drei gleich acht“, Z. 1) steht. Ausgehend von diesem Phänomen schließen die beiden Schülerinnen auf den Fall („ist fünf plus drei“, Z. 3) und das Gesetz (Z. 6–10). Bei dem Gesetz ist zu erkennen, dass es von Mia und Marleen nicht als geltendes Gesetz vorausgesetzt wird. Es ist vielmehr eine Entdeckung, die sich ebenfalls aus dem Phänomen ergibt und den Zusammenhang zwischen dem Phänomen und dem Fall erklärt. Dies unterstreicht den hypothetischen Charakter des Gesetzes. Zur Verifizierung dieser Regel bedarf es dann jedoch der empirischen Überprüfung der Regel, mithilfe z. B. der Induktion (Meyer, 2010, S. 41). Diese Überprüfung erfolgt im Anschluss an den abgebildeten Transkriptausschnitt beispielgebunden.

Fazit

In diesem Beitrag wurde ausgehend von der Peirceschen Semiotik und den Begriffen Diagramm und diagrammatisches Schließen dargelegt, welches didaktische Potential die Abduktion in diesem Kontext besitzt. Durch das kreative Potential diagrammatischen Schließens können in konstruierten Diagrammen Beziehungen entdeckt werden, die nicht für die Konstruktion des Diagramms genutzt wurden. Die Konstruktion der Diagramme geschieht dabei mithilfe deduktiver Schlüsse. Aus den entstehenden Beziehungen lassen sich im Anschluss an deren Entdeckung mithilfe eines abduktiven Schlusses Regeln eines anderen Darstellungssystems als jenes, zu welchem das konstruierte Diagramm gehört, entdecken. Diese Regeln haben jedoch nur einen hypothetischen Charakter und müssen deshalb noch empirisch belegt werden. An dem Beispiel einer Schülerbearbeitung wurde gezeigt, dass Lernende mithilfe abduktiver Schlüsse im Kontext von Rechentafeln auf die Regel zur Subtraktion negativer Zahlen schließen können. Dabei wurde ebenfalls verdeutlicht, dass die Schülerinnen die Regel entdeckt haben und sie somit einen hypothetischen Charakter besitzt, auf dessen Allgemeingültigkeit im weiteren Verlauf noch geschlossen werden muss.

Literatur

Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz*. Frankfurt a. M.: Klostermann.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse* (11. Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.

Meyer, M. (2010). Logik und Mystik des (entdeckenden) Lernens. *Mathematica Didactica,* 33, 32–57.

Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics*. (C. Eisele, Hrsg.), Mathematical philosophy (Bd. 3/1). The Hague; Paris: Mouton Publishers.

Peirce, C. S. (1976a). *The new elements of mathematics*. (C. Eisele, Hrsg.), Mathematical philosophy (Bd. 4). The Hague; Paris: Mouton Publishers.

Peirce, C. S. (1990). *Semiotische Schriften Band 2.* (C. Kloesel & H. Pape, Hrsg.). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Reichertz, J. (2003). *Die Abduktion in der qualitativen Sozialforschung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.