Heinz SCHUMANN, Weingarten

Eine dynamische Erzeugung der Archimedischen Körper aus den Platonischen Körpern mittels Flächenverschiebung

1. Einleitung

Die für den Geometrie-Unterricht geeigneten Dynamischen Raumgeometrie-Systeme (DRGS) gestatten, aus bekannten konvexen Polyedern, etwa aus den implementierten Platonischen Körpern, neue Polyeder zu generieren („neu“ bedeutet dem Kenntnisstand der Geometrielerner entsprechend). Neben den allgemeinen Generierungsmethoden, wie dem formändernden Transformieren (z. B. das affine Abbilden, das spiegelsymmetrische und drehsymmetrische Vervielfachen, das Abbilden mittels Kugelspiegelung) und den Booleschen Operationen (Vereinigung, Differenz und Schnitt), die sich in DRGS nur teilweise als Zusammensetzen (Bildung mittels konvexer Hülle), als Zerlegen (Bildung mittels Ebenenschnitt) und Durchdringen (Bildung mittels Konstruktion) realisieren lassen, kommen zur Anwendung u. a. folgende besonderen Methoden: Eckenstumpfen, Abkanten, Sternen, Zelten und Dualisieren (u. a. Schumann, 2007).

Eine der bisher wenig beachteten Transformationsmethoden ist das „Flächenverschieben“, d. h. das simultane Parallelverschieben von Polyeder-Seitenflächen mit der Bildung ihrer konvexen Hülle, um neue Polyeder zu gewinnen. Diese Methode soll hier angewendet werden, um aus den Platonischen Körpern alle Archimedischen Körper, bis auf zwei, zu gewinnen.

2. Erzeugung der Archimedischen Körper aus den Platonischen Körpern mittels Verschiebung von Seitenflächen

Im Folgenden beschreiben wir diese Transformationsmethode am Beispiel des Würfels: Zuerst wird dem Würfel eines seiner Oberflächen-Quadrate (Startquadrat) parallel verschoben und dieses mittels Drehungen um Symmetrie-Achsen des Würfels über die restlichen Quadrate der Oberfläche abgebildet (Abb. 1.1). Jedes Verziehen des anfänglich verschobenen Quadrats hat die Parallelverschiebung der restlichen Quadrate zur Folge. Danach wird die konvexe Hülle aller verschobenen Quadrate gebildet. Man erhält so ein Polyeder der Verschiebungs-Polyederschar des Würfels (Abb. 1.2). Bei passendem Verziehen des Startquadrats entsteht das Rhombenkuboktaeder (Abb. 1.3). Zwischen der neuen Kante, die länger oder kürzer sein kann als die des Quadrats, gibt es aus Gründen der Stetigkeit genau eine gleicher

Siller, H.-S., Weigel, W. & Wörler, J. F. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020.* Münster: WTM-Verlag, 2020.
doi: 10.37626/GA9783959871402.0

Länge. Konstruktiv wird die Passung hergestellt durch Abtragen der Kantenlänge des verschobenen Quadrats mittels eines Kreises um eine Polygonecke, dessen Radius gleich der Kantenlänge ist.

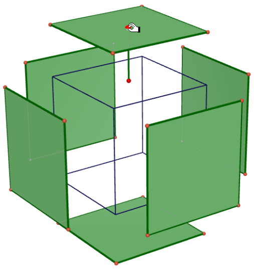

Abb. 1.1: Parallelverschiebung der Quadratflächen des Würfels

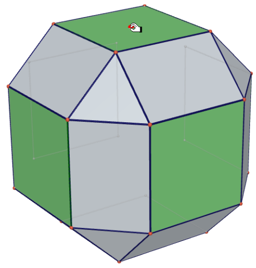

Abb. 1.2: Beispiel aus der Verschiebungsschar des Würfels

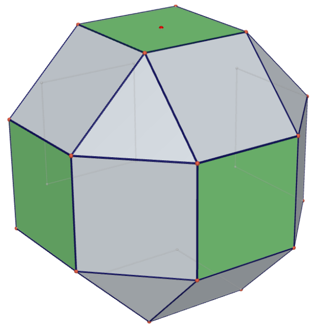

Abb. 1.3: Rhombenkuboktaeder

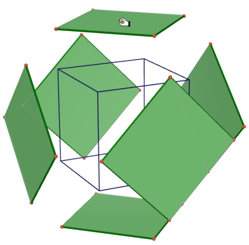

Abb. 2.1: Parallelverschiebung der um 45° rotierten Quadratflächen

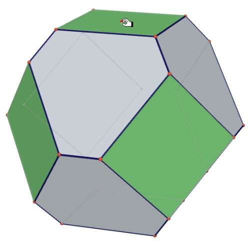

Abb. 2.2: Beispiel aus der Verschiebungsschar

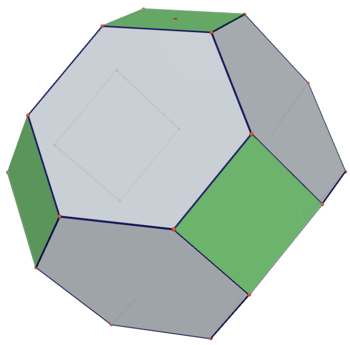

Abb. 2.3: Oktaederstumpf

Dreht man außerdem noch das Quadrat über der kongruenten Seitenfläche um 90°/2 = 45° (Abb. 2.1) und verfährt wie vorstehend, so ergibt sich der Oktaederstumpf (Abb. 3.2/3).

Auf analoge Weise bekommt man ...

- vom Tetraeder das Kuboktaeder und bei einer Drehung des Startdreiecks um 60°/2 = 30° den Tetraederstumpf;
- vom Oktaeder das Rhombenkuboktaeder und bei einer Drehung des Startdreiecks um 60°/2 = 30° den Würfelstumpf;
- vom Dodekaeder das Rhombenikosidodekaeder und bei einer Drehung des Startfünfecks um 72°/2 = 36° den Ikosaederstumpf und als Grenzfall das Ikosidodekaeder;

- vom Ikosaeder das Rhombenikosidodekaeder und bei einer Drehung des Startdreiecks um 60°/2 = 30° den Dodekaederstumpf und als Grenzfall das Ikosidodekaeder.

Anmerkung 1: Bei den vorstehenden Erzeugungen kommt auch die Dualität zwischen Platonischen Körpern zum Ausdruck.

Erzeugung des Kuboktaederstumpfs und Ikosidodekaederstumpfs mittels Flächenverschiebung: Da die Platonischen Körper nur Dreiecke, Quadrate und Fünfecke als Seitenflächen haben, so sind der Kuboktaederstumpf, auch Großes Rhombenkuboktaeder genannt, und der Ikosidodekaederstumpf, auch Rhombenikosidodekaeder genannt, bisher noch nicht mittels Flächenverschiebung erzeugt worden. – Der Würfelstumpf besitzt achteckige Seitenflächen und der Dodekaederstumpf zehneckige. Durch entsprechende Flächenverschiebung des Würfelstumpfes bzw. Dodekaederstumpfes mit seinen achteckigen bzw. zehneckigen Seitenflächen könnte man den Kuboktaederstumpf bzw. Ikosidodekaederstumpf erzeugen. Legt man aber auf die Oberfläche des Würfels ein Achteck bzw. auf die Oberfläche des Dodekaeders ein Zehneck, mit Vieleckseiten parallel zur jeweiligen Polyederkante, so sind Kuboktaederstumpf bzw. Ikosidodekaederstumpf durch Flächenverschiebung erzeugbar.

Anmerkung 2: Bisher hatten wir die entsprechenden Polyeder nur unter der Vorgabe, dass diese regelmäßige Seitenflächen haben sollen, generiert. In diesem und im folgenden Abschnitt wird hingegen das Erzeugungsziel als bekannt vorausgesetzt.

3. Erzeugung des Abgeschrägten Würfels und des Abgeschrägten Dodekaeders mittels Torsion

Es fehlt noch die Erzeugung des Abgeschrägten Würfels und des Abgeschrägten Dodekaeders. Beide Körper lassen sich nicht allein mit der Methode der Flächenverschiebung gewinnen. Es bedarf zusätzlich zu einer Parallelverschiebung noch einer Drehung, d. h. also insgesamt einer Torsion der Quadratflächen des Würfels bzw. der Fünfeckflächen des Dodekaeders (Schumann, 2019).

Anmerkung 3: Der Abgeschrägte Würfel bzw. das Abgeschrägte Dodekaeder kann auch mittels geeigneter Torsion aus dem Rhombenkuboktaer bzw. Rhombenikosidodekaeder hergestellt werden.

4. Ausblick

Die Methode der Flächenverschiebung kann natürlich auch auf andere Polyederklassen angewendet werden, um neue Polyeder zu generieren. Beispielsweise kommen dafür in Frage die Archimedischen Körper selbst und die zu den Archimedischen Körpern dualen Körper, die Catalanischen Körper. – – Das führen wir am Beispiel des Rhombendodekaeders aus und benutzen dazu unsere Transformationsmethode (Abb. 3.1 – 3.3). Das erzeugte Polyeder erhält den Namen „Rhombi-Rhombendodekaeder", in Anlehnung an die Bezeichnung eines Archimedischen Körpers.

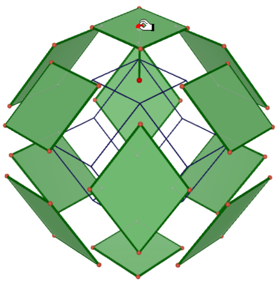

Abb. 3.1: Parallelverschiebung der Rhombenflächen des Rhombendodekaeders

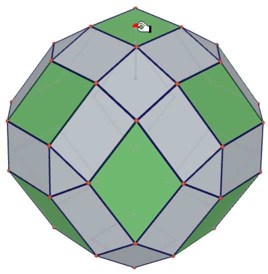

Abb. 3.2: Ein Beispiel aus der Verschiebungsschar des Rhombendodekaeders

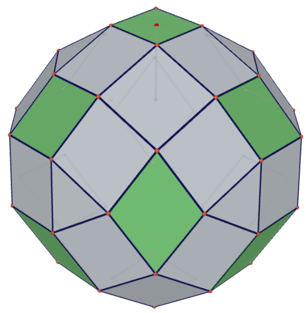

Abb. 3.3: „Rhombi-Rhombendodekaeder"

Literatur

Schumann, H. (2007). *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Schumann, H. (2019). Experimentelle Geometrie. *LOG IN (Informatische Bildung und Computer in der Schule),* Nr. 191/192, 79–86.

https://de.m.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper (03.01.20)

https://de.m.wikipedia.org/wiki/Archimedischer_Körper (03.01.20)

https://de.m.wikipedia.org/wiki/Catalanischer_Körper (03.01.20)